Prodotto vettore

Momento di una forza

Mauro Saita

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a:

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[0]Nome file: 'Momento_di_una_forza_prodotto_vettore.tex'

1 Prodotto vettore

Definizione 1.1. *Data una coppia ordinata di vettori* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *il* prodotto vettore

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

*(si legge: '*A vettore B*') è il vettore definito dalle proprietà seguenti:*

1. *La direzione di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *è ortogonale sia al vettore* $\mathbf{A}$ *che al vettore* $\mathbf{B}$*.*
2. *La lunghezza di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *è uguale all'area del parallelogramma generato da* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, vale a dire*
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\sin\alpha \tag{1.1}$$
dove α*, compreso tra* 0 *e* $180°$*, è l'angolo tra i vettori* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$*.*
3. *Il verso di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *(quando* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *non è nullo) è quello stabilito dalla "regola della mano destra".*

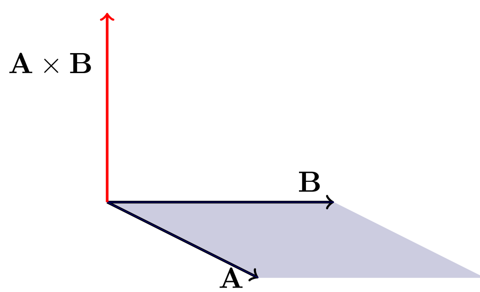

Figura 1: Il prodotto vettore $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

1.1 Proprietà del prodotto vettore

Il prodotto vettore valgono le seguenti proprietà

1. Se uno dei due vettori è nullo il loro prodotto vettore è zero, cioè

$$\text{Se } \mathbf{A} = 0 \text{ oppure } \mathbf{B} = 0 \text{ allora } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

2. Se uno dei due vettori è multiplo dell'altro allora il loro prodotto vettore è zero

$$\text{Se } \mathbf{B} = k\mathbf{A}, \text{ dove } k \text{ è un numero, allora } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

3. Il prodotto vettore è anticommutativo, vale infatti il seguente

Teorema 1.2. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due vettori qualsiasi dello spazio ordinario si ha*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1.2}$$

La dimostrazione segue immediatamente dalla regola della mano destra.

4. Il prodotto vettoriale $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è bilineare, vale cioè il seguente teorema

   Teorema 1.3. *Se* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{C}$ *sono tre vettori qualsiasi dello spazio ordinario e* k *è un numero si ha*

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times \mathbf{C} & = & \mathbf{A} \times \mathbf{C} \;+\; \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B}) + \mathbf{C}) & = & \mathbf{A} \times \mathbf{B} \;+\; \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\ (k\,\mathbf{A}) \times \mathbf{B} & = & k\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (k\,\mathbf{B}) & = & k\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \end{array}$$

   Non si riporta la dimostrazione di questo teorema.

2 Momento di una forza

2.1 Momento di una forza rispetto a un polo

Sia $\mathbf{F}$ la forza applicata nel punto P di un corpo rigido. Fissato un punto O dello spazio tridimensionale, il vettore $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ è detto *vettore posizione della forza* $\mathbf{F}$ ($\mathbf{r}$ individua il punto di applicazione di $\mathbf{F}$) mentre il punto O è detto *polo*. Si chiama *momento della forza* $\mathbf{F}$ *rispetto al polo* O il vettore

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

si legge: 'M uguale a r vettore F' (il simbolo "×" denota il prodotto vettore).

Il vettore $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ si determina nel modo seguente:

- **Intensità di M:** si trasporti "per parallelismo" il vettore $\mathbf{F}$ in O. Detto α l'angolo individuato da $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$, si ha:
$$M = F \cdot r \sin\alpha$$
- **Direzione di M:** la direzione di $\mathbf{M}$ è ortogonale al piano individuato da $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$.
- **Verso di M:** il verso di $\mathbf{M}$ si stabilisce con la "regola della mano destra".

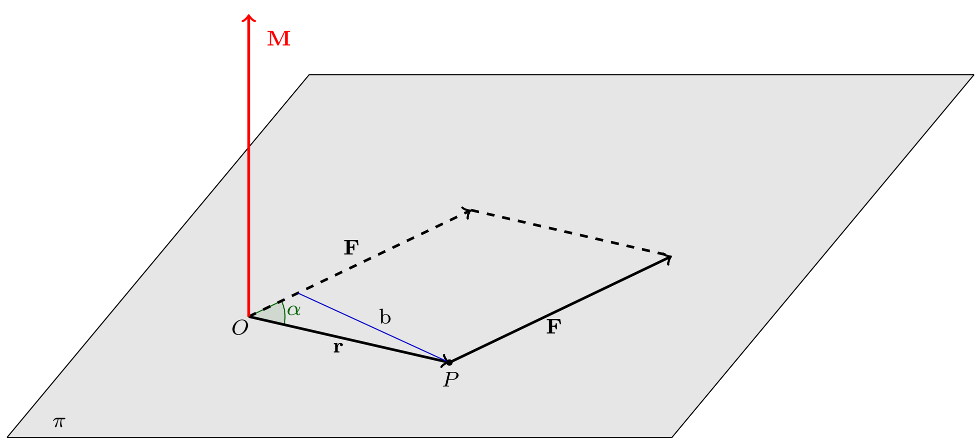

Figura 2: Momento della forza $\mathbf{F}$ rispetto al polo O. La forza $\mathbf{F}$, applicata in P, e il vettore $\mathbf{r}$ giacciono nel piano π mentre il momento $\mathbf{M}$ è perpendicolare a tale piano.

Il numero $r\sin\alpha$ *si chiama* braccio di $\mathbf{F}$ rispetto al polo O.

Nella figura qui sotto il piano individuato dalla forza $\mathbf{F}$ e dal vettore posizione $\mathbf{r}$ è il piano del foglio.

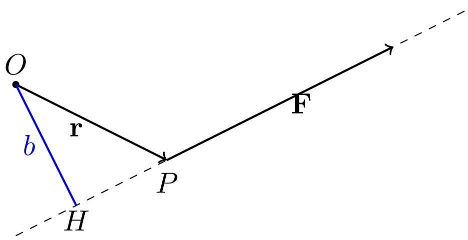

Figura 3: Il braccio della forza **F** rispetto al polo O è la lunghezza del segmento OH.

Per determinare il braccio di **F** rispetto a O si può fare così: si tracci la retta passante per O e perpendicolare alla retta d'azione di **F**. Indicato con H il piede di tale perpendicolare, il braccio è la lunghezza del segmento $\overline{OH}$, cioè

$$b = \overline{OH}$$

Esercizio 2.1. *Il momento di una forza si misura in* $N \cdot m$ *(Newton per metro). Spiegare.*

Esercizio 2.2. *Se il polo* O *si trova sulla retta d'azione della forza* $\overrightarrow{F}$ *quanto vale il momento* $\overrightarrow{M}$*?*

Esercizio 2.3. *Se si sposta il punto* A *di applicazione della forza* $\overrightarrow{F}$ *lungo la retta d'azione di* $\overrightarrow{F}$ *il momento non cambia. Spiegare utilizzando un disegno.*

Esercizio 2.4. *A un'asta rigida, incernierata in* O *è applicata la forza* $\overrightarrow{F}$ *indicata in figura. Quanto vale il momento* $\overrightarrow{M}$ *della forza* $\overrightarrow{F}$ *rispetto a* O*?*

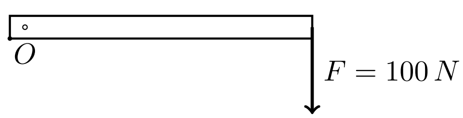

Figura 4: Forza $\overrightarrow{F}$ e vettore posizione $\overrightarrow{r}$ sono ortogonali.

Esercizio 2.5. *A un'asta rigida, incernierata in* O *è applicata la forza* $\overrightarrow{F}$ *mostrata in figura. Quanto vale il momento* $\overrightarrow{M}$ *della forza* $\overrightarrow{F}$ *rispetto a* O*?*

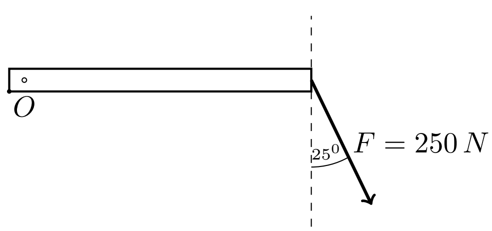

Figura 5: La forza $\overrightarrow{F}$ forma un angolo di 25^0 rispetto alla verticale.

2.2 Risultante e momento risultante di un sistema di forze

Su un corpo agiscono n forze $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ..., $\overrightarrow{F_n}$ rispettivamente applicate in A_1, A_2, ... , A_n. Si chiama *risultante delle forze esterne* del sistema di forze il vettore

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}$$

Fissato un polo O, si chiama *momento risultante* del sistema di forze rispetto al polo O il vettore

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_n}$$

dove $\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_n}$ sono i momenti rispetto al polo O delle singole forze.

Osservazione 1. Per determinare la risultante di un sistema di forze si può scegliere in modo arbitrario un punto O, trasportare per parallelismo tutte le forze in O e poi determinare la risultante $\overrightarrow{F}$ mediante la regola del parallelogramma. Per i momenti la situazione è più complicata: se si cambia polo, cambia anche il momento risultante. In altre parole, se $\overrightarrow{M}$ e $\overrightarrow{M'}$ sono i momenti risultanti rispetto al polo O e al polo O' di uno stesso sistema di forze si ha:

$$\overrightarrow{M} \neq \overrightarrow{M'}$$

Osservazione 2. Se le forze $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ..., $\overrightarrow{F_n}$ giaciono tutte nello stesso piano la risultante $\overrightarrow{F}$ sarà anche essa nello stesso piano mentre il momento risultante avrà direzione ortogonale a tale piano.

2.3 Momento rispetto a un asse

Con riferimento alla figura, si consideri la retta r e una forza $\overrightarrow{F}$ applicata in A. Si determini la componente $\overrightarrow{F_r}$ di F nella direzione di r. È facile convincersi che il momento $\overrightarrow{M_r}$ di $\overrightarrow{F_r}$ non cambia al variare del polo O su r.

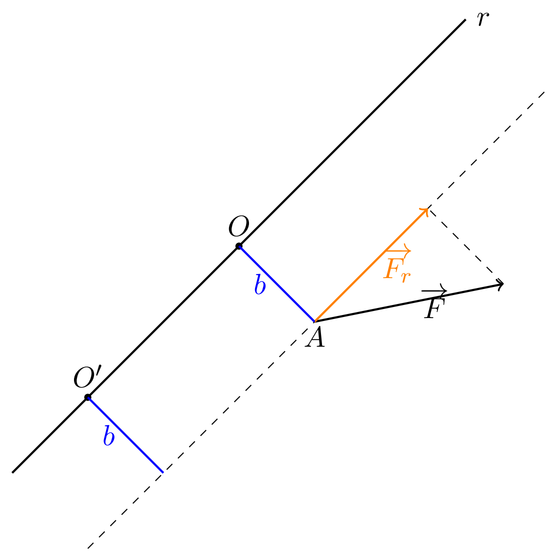

Figura 6: Il momento $\overrightarrow{M_r}$ non cambia se si sposta il polo O sulla retta r.

L'osservazione appena fatta giustifica la seguente definizione: si chiama *momento di* $\overrightarrow{F}$ *rispetto alla retta* r il momento $\overrightarrow{M_r}$ della componente di $\overrightarrow{F}$ lungo la parallela alla retta r passante per A, calcolato rispetto a un punto qualsiasi $O \in r$.

2.4 Condizioni per l'equilibrio di un corpo solido

Corpo solido in equilibrio. Sia S un corpo solido sottoposto all'azione delle forze esterne $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ (alcune di esse possono essere reazioni vincolari dovute alla presenza di uno o più vincoli). Il corpo S si dice in *equilibrio* se, in certo istante di tempo t, esso risulta in quiete e le forze considerate non determinano su di esso alcun fenomeno di moto.

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo solido

Un corpo solido sul quale agiscono le forze esterne $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ è in equilibrio se e solo se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1. la somma vettoriale di tutte le forze esterne deve essere nulla, cioè
$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = 0$$
2. la somma vettoriale di tutti i momenti delle forze esterne che agiscono sul corpo deve essere nulla, cioè
$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_n} = 0$$

Si osservi che nella condizione [2.] non si è precisato rispetto a quale polo calcolare i momenti delle forze; ciò è dovuto al fatto che il polo rispetto al quale calcolare i momenti *può essere scelto arbitrariamente.*

2.5 Esempi di equilibrio statico

Esercizio 2.6 (Scala appoggiata al muro.). *Una scala da pompieri di lunghezza* $L = 12\,m$ *e massa* $m = 45\,kg$ *è appoggiata a un muro verticale (privo di attrito) e la sua estremità superiore è a quota* $h = 9.3\,m$ *dal suolo. Un vigile del fuoco, di massa* $M = 72\,kg$*, sale fino a un terzo della scala stessa. Tenendo conto solo degli attriti tra scala e pavimento, si disegni il diagramma delle forze (esterne) del sistema e si determinino tutte le intensità di tali forze.*

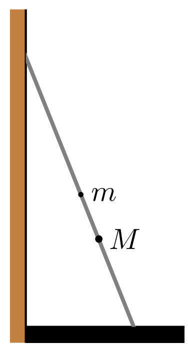

Figura 7: Scala appoggiata a un muro verticale.