Gli *Elementi* di Euclide

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2011.[1]

Indice

Simplicio: Voi procedete nelle vostre dimostrazioni troppo alla grande, ed andate sempre, per quanto mi pare, supponendo che tutte le proposizioni di Euclide mi siano così familiari e pronte, come gli stessi primi assiomi, il che non è [...]

Salviati: Veramente tutti i matematici non vulgari suppongono che il lettore abbia prontissimi almeno gli Elementi di Euclide [...]

Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata Quarta.

1 La struttua degli *Elementi*.

Euclide nacque nel 325 A.C. e morì ad Alessandria d'Egitto nel 265 A.C. Durante la sua vita raccolse ed espose in modo sistematico tutte le conoscenze di geometria e di aritmetica, note ai suoi tempi. La sua opera, gli *Elementi*, costituì il più autorevole e importante testo di matematica per circa due millenni. Essa è strutturata in tre parti

- nella prima parte si presentano le *definizioni*, dette *termini*; lo scopo è quello di definire gli oggetti di cui si parlerà nel testo (punto, retta, angolo, eccetera);

- nella seconda parte si elencano gli *assiomi*, suddivisi in *postulati* e *nozioni comuni*; si tratta di una serie di proposizioni primitive che vengono assunte per vere a prori; esse non prevedono una dimostrazione, la loro validità è garantita dall'evidenza di quanto si afferma. La suddivisione degli assiomi in postulati e nozioni comuni si può giustificare nel seguente modo: i postulati sono proposizioni che riguardano strettamente la geometria, mentre le nozioni comuni sono di carattere più generale, al punto da risultare valide anche al di fuori dell'ambito della geometria;

- nella terza parte si elencano tutti i *teoremi*, cioè tutte quelle proposizioni che si riescono a dedurre dalle definizioni, degli assiomi e da altre proposizioni dimostrate in precedenza. I teoremi, devono sempre essere seguiti da una *dimostrazione*, convincente e rigorosa: è la dimostrazione che garantisce la verità di ogni singola proposizione.

A titolo di esempio si riportano qui sotto alcune definizioni (i termini), i primi cinque postulati e due esempi di teoremi (la proposizione 1 e la proposizione 4) con le relative dimostrazioni così come sono proposte negli *Elementi* di Euclide.

[1]Nome File: euclide-2011.tex

Termini

1. *Punto* è ciò che non ha parti.
2. *Linea* è una lunghezza senza larghezza.
3. *Linea retta* è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.
4. *Superficie* è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
5. *Piano* è ciò che è posto allo stesso livello rispetto alle rette su se stesso.
6. *Angolo piano* è l'inclinazione reciproca di due linee che in un piano hanno un estremo in comune ma non sono per diritto.

...

15. *Cerchio* è una figura piana compresa da una sola linea [chiamata circonferenza], tutte le rette che incidono sulla quale, condotte da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura [il centro], sono uguali tra loro.

...

23. *Parallele* sono due rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dalle due parti, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Postulati:

1. Da ogni punto si può condurre una retta ad ogni altro punto.
2. Ogni retta terminata si può prolungare continuamente per diritto.
3. Da ogni centro e con ogni intervallo si può tracciare un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.
5. Se in un piano una retta, incontrandone altre due, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

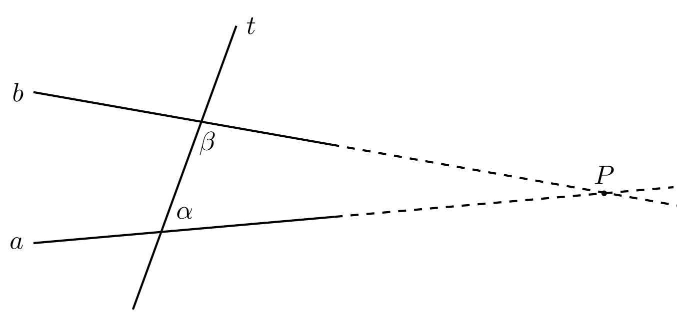

Figura 1: Postulato 5: se $\alpha + \beta$ è minore di due angoli retti allora le rette a e b si incontrano in P.

Nozioni comuni

1. Cose uguali a un'altra medesima sono uguali.
2. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.

3. Se da cose uguali si tolgono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.

4. Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una con l'altra sono uguali tra loro.

5. Il tutto è maggiore della parte.

...

2 Le prime proposizioni

Il primo teorema degli Elementi di Euclide è il seguente

Proposizione 1.

Dato un qualsiasi segmento di retta, è possibile costruire un triangolo equilatero che abbia per lato quel segmento.

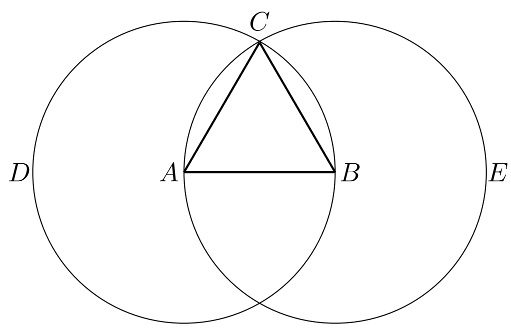

Figura 2

Sia AB il dato segmento di retta. È possibile tracciare [per il postulato 3] il cerchio BCD di centro A e raggio AB e il cerchio ACE di centro B e raggio BA. Questi cerchi si intersecano in due punti. Si chiami C uno di essi. È possibile [per il postulato 1] tracciare i segmenti AC e BC. Poichè il punto A è il centro del cerchio CDB, AC è uguale a AB [Def. 15]. E poichè il punto B è il centro del cerchio CAE, BC è uguale a BA [Def. 15]. Così, CA e CB sono entrambi uguali a AB. Ma cose uguali a un'altra medesima sono uguali [Nozioni comuni 1]. Quindi anche CA è uguale a CB e i tre segmenti CA, AB, BC sono tra loro uguali. Così il triangolo ABC è equilatero e risulta costruito sul dato segmento di retta AB, il che si doveva fare.

Proposizione 4.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali ai due lati, e hanno anche l'angolo, quello compreso dai lati uguali, uguale all'angolo, avranno anche la base uguale alla base, e il triangolo sarà uguale al triangolo, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli.

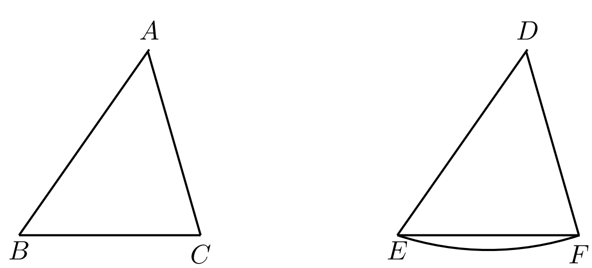

Figura 3

Siano ABC e DEF due triangoli aventi i lati AB e AC rispettivamente uguali ai due lati DE e DF, e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF. Io dico che la base BC è uguale alla base EF, e il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli, ABC a DEF, ACB a DFE.

Sovrapposto infatti il triangolo ABC al triangolo DEF e posto il punto A sul punto D e il lato AB su DE, anche il punto B si sovrapporrà a E per il fatto di essere AB uguale a DE; sovrappostosi ora AB a DE anche il lato AC si sovrapporrà a DF per il fatto di essere l'angolo BAC uguale a EDF: così che BC come base si sovrapporrà a EF come base. Se infatti, sovrappostisi B a E e C a F, la base BC non si sovrapporrà a EF, i due lati comprenderanno un dominio; il che è impossibile. La base BC si sovrapporrà quindi a EF e sarà uguale a essa: così che anche il triangolo ABC totale si sovrapporrà al triangolo DEF totale e sarà uguale a esso, e i restanti angoli si sovrapporranno ai restanti angoli e saranno uguali a essi, ABC a DEF e ACB a DFE. [...] il che si doveva dimostrare.

3 Il quinto postulato

Se si rilegge l'elenco dei postulati di pag. 2 si nota subito che i primi quattro sono semplici, facilmente comprensibili e vengono enunciati in meno di una riga. Per il quinto la situazione è diversa: l'enunciato è ben più lungo e complicato; per capirlo bisogna leggerlo più volte e aiutarsi con una figura. Inoltre la validità dei primi quattro è evidente, quello del quinto molto meno. Anche Euclide deve averci pensato e ripensato prima di includerlo nel suo elenco, tanto che si trattiene dall'usarlo fino alla proposizione 29.

Che cosa afferma esattamente il quinto postulato?

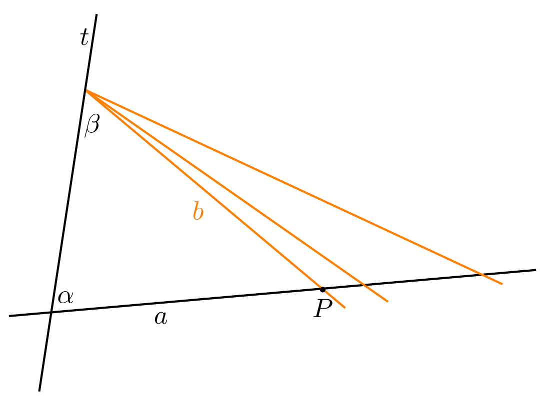

Figura 4

Se le rette a e b formano con la trasversale t angoli la cui somma è molto minore di due angoli retti è del tutto evidente che le rette si incontrano in un punto P come richiesto dal quinto postulato. Ma, si osservi la fig. 4, se si tengono fisse le rette a e t e si ruota la retta b in modo da far crescere l'angolo β, allora il punto P si sposta sempre più verso destra fino ad uscire dal foglio. In questo caso l'evidenza del quinto postulato è meno scontata perchè il punto P cessa di essere osservabile.

Il filosofo e matematico Proclo (412 d.C - 485 d.C.) disse: "Questo non è un postulato, è un teorema!", e cercò di dimostrarlo senza riuscirci. Qualche secolo prima anche il grande geografo Tolomeo ($\sim$ 100 d.C. - $\sim$ 175 d.C), cercò una dimostrazione per il quinto postulato e dedicò all'argomento un intero libro, oggi andato perduto. I suoi sforzi, come quelli di tanti altri, furono vani.

Una formulazione equivalente del quinto postulato è questa

Proposizione 3.1. *In un piano è data una retta e un punto non appartenente ad essa. Esiste una e una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data.*

Per convincersi ancora di più della scarsa evidenza del quinto postulato si osservi la seguente figura

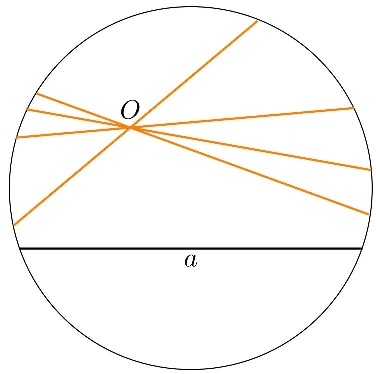

Figura 5

Se si potesse racchiudere il piano contenente la retta a e il punto O nella regione interna al cerchio allora esisterebbero infinite rette (le corde del cerchio) passanti per O che non intersecano la retta a. Facendo crescere il raggio del cerchio le rette per O che non incontrano a restano sempre infinite. È così evidente che questa situazione cessa di sussistere quando il piano diventa illimitato?