Numeri razionali

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[0]Nome file .tex: numeri_razionali_2024.tex'

1 Numeri razionali

1.1 Definizione provvisoria di numeri razionali come frazioni

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri *razionali* (latino *ratio*, rapporto) è costituito da tutte le frazioni $\frac{m}{n}$, dove m, n sono in $\mathbb{Z}$ e n è diverso da zero.

Si tenga presente che esistono frazioni diverse che individuano lo stesso numero razionale. Due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ si dicono equivalenti se $mn' = m'n$ (per esempio, le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti).

1.2 $\mathbb{Q}$ è un *campo*

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sono definite due operazioni fondamentali: quella di somma, e quella di prodotto. Per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ la somma si denota con '$a + b$' e il prodotto con '$a \cdot b$' (oppure con 'ab'). Per queste due operazioni valgono i seguenti assiomi

Assiomi della somma.

Per l'operazione '+' di somma valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$
$$a + b = b + a$$

2. *Proprietà associativa.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro della somma.* Per ogni $a \in \mathbb{Q}$ vale
$$a + 0 = 0 + a = a$$
Il numero 0 si chiama *elemento neutro* della somma.

4. *Esistenza dell'elemento opposto.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{Q}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{Q}$, detto *opposto* di a, per il quale si ha
$$a + b = b + a = 0$$
L'opposto di a è il numero $b = -a$.

Assiomi del prodotto.

Per l'operazione '$\cdot$' di prodotto valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. *Proprietà associativa.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro del prodotto.* Per ogni $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ vale

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

   Il numero 1 si dice *elemento neutro* del prodotto.

4. *Esistenza dell'elemento inverso.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{Q}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{Q}$, detto *inverso* di a, per il quale si ha

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

   L'inverso di a è il numero $b = a^{-1}$.

Vale inoltre la *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*: per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Le due operazioni di somma e prodotto, collegate tra loro dalla proprietà distributiva, fanno di $\mathbb{Q}$ un *campo*.

1.3 $\mathbb{Q}$ è un campo *ordinato*

Inoltre, $\mathbb{Q}$ è un *campo ordinato*: questo significa che in $\mathbb{Q}$ è definita una *relazione di ordine* totale che si denota '$\leq$' per la quale valgono i seguenti assiomi

1. *Proprietà riflessiva.* Per ogni $a \in \mathbb{Q}$

$$a \leq a$$

2. *Proprietà simmetrica.* Per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq a \text{ allora } a = b$$

3. *Proprietà transitiva.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq c \text{ allora } a \leq c$$

Inoltre la relazione d'ordine definita in $\mathbb{Q}$ è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, ossia:

1. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$,
$$\text{se } a \le b \ \text{ allora } \ a + c \le b + c$$
2. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$ con $c > 0$,
$$\text{se } a \le b \ \text{ allora } \ ac \le bc$$
3. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Q}$ con $c < 0$,
$$\text{se } a \le b \ \text{ allora } \ ac \ge bc$$

2 Alcune proprietà dei numeri razionali

2.1 Un numero moltiplicato per zero dà zero

Teorema 2.1. *Per ogni a in $\mathbb{Q}$,*

$$a \cdot 0 = 0$$

Dimostrazione.

Utilizzando la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma si scrive

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) \tag{2.1}$$

Sommando ai due termini dell'uguaglianza $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, l'opposto di $a \cdot 0$ si ottiene: $-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$. Segue $a \cdot 0 = 0$ ∎

2.2 Più per meno fa meno

Teorema 2.2. *Per ogni a, b in $\mathbb{Q}$,*

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Dimostrazione.

Utilizzando la proprietà distributiva

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

Dunque, $a \cdot (-b)$ è l'opposto di $a \cdot b$, ossia $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

2.3 Meno per meno fa più

Teorema 2.3. *Per ogni a, b in $\mathbb{Q}$,*

$$(-a)(-b) = ab$$

2.4 Legge di annullamento del prodotto

Teorema 2.4. *Per ogni a, b in $\mathbb{Q}$,*

$$\textit{se} \;\; a \cdot b = 0 \;\; \textit{allora} \;\; a = 0 \;\; \textit{oppure} \;\; b = 0$$

Dimostrazione.

Per ipotesi

$$a \cdot b = 0 \tag{2.2}$$

Se $a = 0$ il teorema è dimostrato. Se $a \neq 0$, allora a è invertibile. Moltiplicando per a^{-1} entrambi i termini dell'uguaglianza (2.2), si ha:

$$= a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Segue $b = 0$. ∎

3 Valore assoluto

Definizione 3.1. *Il* valore assoluto *o* modulo *di un numero $a \in \mathbb{Q}$ si definisce così:*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{se } a \geq 0; \\ -a & \textit{se } a < 0. \end{cases}$$