

Note di ottica geometrica.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, novembre 2012.

Indice

1	Ottica geometrica	1
2	Riflessione.	2
2.1	La legge della riflessione	2
2.2	Punto immagine in uno specchio piano	3
3	Specchi sferici.	4
3.1	Specchi sferici concavi e convessi.	4
3.2	Approssimazioni di Gauss	4
3.3	Fuoco principale	4
3.4	Punto immagine.	5
3.5	Equazione dei punti coniugati.	5
3.6	Immagini in specchi sferici.	6
4	Specchi parabolici	7
5	Rifrazione. Legge di Snell.	7
5.1	Indici di rifrazione	8

1 Ottica geometrica

L'ottica geometrica si fonda sul seguente principio

Principio di tempo minimo. (Fermat, 1601-1665)

Tra tutti i possibili cammini che la luce può seguire per andare da un punto ad un altro, essa segue il cammino che richiede il tempo più breve.

Se il raggio luminoso si propaga da un punto P a un punto Q in un mezzo ottico omogeneo (per esempio aria, acqua oppure nel vuoto) la traiettoria di tempo minimo coincide con la traiettoria di distanza minima; in altre parole se il raggio luminoso si propaga in un mezzo

⁰Nome file: 'riflessione-rifrazione-2012.tex'

omogeneo esso si muove in linea retta lungo il segmento \overline{PQ} . Ciò è un'immediata conseguenza del fatto che la velocità della luce in un mezzo omogeneo è costante.

2 Riflessione.

2.1 La legge della riflessione

Si consideri un raggio luminoso uscente da P che incide in O su uno specchio piano AB . Dal principio di tempo minimo si deduce che

1. le traiettorie del raggio incidente e di quello riflesso devono essere rettilinee;
2. detto OQ il raggio riflesso, la somma delle distanze di P da O e di O da Q deve essere minima, cioè

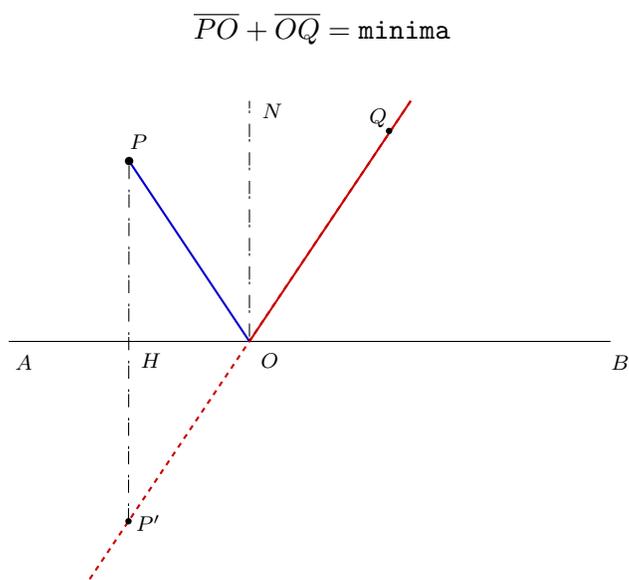


Figura 1: Riflessione di un raggio luminoso.

Per determinare la direzione del raggio OQ si costruisca il punto P' , simmetrico di P rispetto allo specchio AB . Essendo

$$\overline{PO} = \overline{P'O}$$

si ha:

$$\overline{PO} + \overline{OQ} = \overline{P'O} + \overline{OQ}$$

Evidentemente, la quantità $\overline{P'O} + \overline{OQ}$ risulta minima quando il percorso da P' a Q è rettilineo, cioè quando Q si trova sul prolungamento della retta $P'O$.

Poichè i triangoli POH e $P'OH$ sono congruenti, si ha: $PO = P'O$ e $\widehat{POH} = \widehat{P'OH}$

Pertanto si ottiene:

$$\widehat{PON} = \widehat{NOQ}$$

perchè complementari di angoli uguali.

Riassumendo, vale la seguente proprietà detta *legge di riflessione*. Quando un raggio di luce incontra la superficie di uno specchio piano viene riflesso.

- Il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale allo specchio nel punto di incidenza sono complanari;
- l'angolo d'incidenza $i = \widehat{PON}$ e quello di riflessione $\hat{r} = \widehat{NOQ}$ sono uguali, cioè

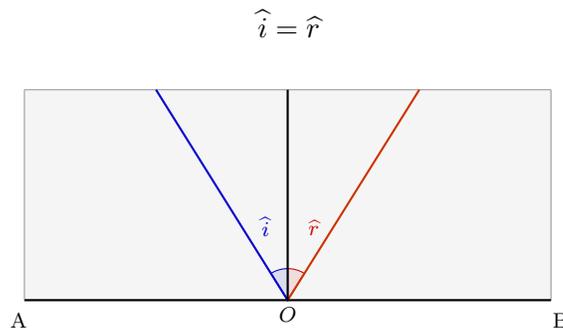


Figura 2: Il raggio incidente (di colore blu), dopo aver incontrato lo specchio piano AB , viene totalmente riflesso (raggio rosso). L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

2.2 Punto immagine in uno specchio piano

La figura 3 mostra che i raggi incidenti uscenti dall'oggetto puntiforme P (punto oggetto) vengono riflessi dallo specchio AB secondo la legge della riflessione (angolo di incidenza = angolo di riflessione). Si noti che i raggi riflessi passano tutti per lo stesso punto P' , *immagine virtuale* di P , che è il simmetrico di P rispetto ad AB . Gli specchi piani forniscono immagini *virtuali* degli oggetti che in essi si riflettono; tali immagini sono simmetriche rispetto allo specchio: la destra dell'oggetto diviene la sinistra dell'immagine.

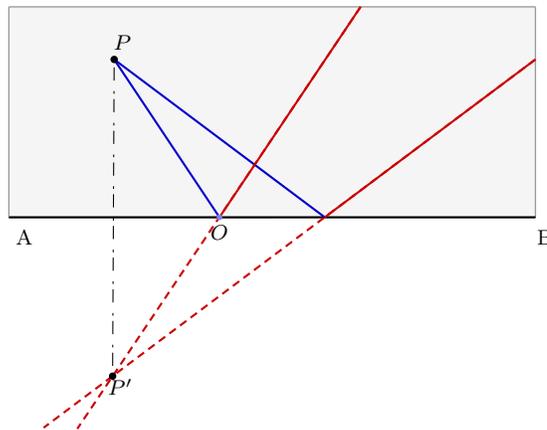


Figura 3: Punto immagine in uno specchio piano.

3 Specchi sferici.

3.1 Specchi sferici concavi e convessi.

Uno specchio sferico è una superficie riflettente a forma di calotta sferica. Se la superficie riflettente è interna alla calotta lo specchio si dice *concavo*, se è esterna lo specchio si dice *convesso*. Il centro O della sfera a cui appartiene la calotta riflettente si chiama *centro di curvatura* mentre il raggio della sfera è detto *raggio di curvatura*. La retta OV , dove O è il centro della sfera e V è il centro della calotta, si chiama *asse ottico principale*.

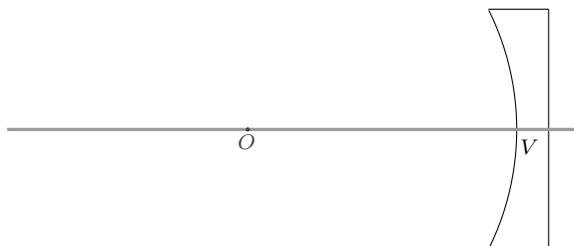


Figura 4: Specchio sferico concavo. Lo specchio, a forma di calotta sferica, appartiene a una sfera di raggio OV ; V è il centro dello specchio e O è il centro di curvatura. La retta per O e V è l'asse ottico principale.

3.2 Approssimazioni di Gauss

In specchi di questo tipo, se si vuole che le immagini di oggetti puntiformi siano approssimativamente puntiformi, occorre fare le seguenti ipotesi:

- lo specchio deve essere di *piccola curvatura*, cioè le dimensioni della calotta devono essere piccole rispetto al raggio di curvatura;
- i raggi devono essere *parassiali*, cioè si devono poter considerare solo raggi poco inclinati rispetto all'asse ottico principale.

3.3 Fuoco principale

Se i raggi incidenti sono paralleli all'asse ottico principale¹ allora i raggi riflessi intersecano l'asse ottico principale OV approssimativamente in uno stesso punto F detto *fuoco principale*. Il fuoco F di uno specchio concavo si trova, con buona approssimazione, a metà fra il centro di curvatura O e la superficie dello specchio (punto V), cioè

$$\overline{OF} \approx \overline{FV} = \frac{R}{2}$$

La distanza $FV = f$ si chiama *distanza focale*. Si ha:

$$f = \frac{R}{2}$$

¹Più in generale, se i raggi incidenti formano piccoli angoli di incidenza.

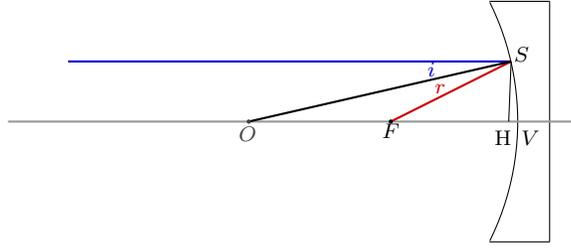


Figura 5: Riflessione in uno specchio sferico concavo. Il raggio incidente (di colore blu), parrallelo all'asse ottico principale, incide sulla superficie sferica riflettente nel punto S . L'angolo di incidenza i e l'angolo di riflessione r coincidono (legge della riflessione); il raggio riflesso (di colore rosso) interseca l'asse ottico principale nel *fuoco principale* F .

3.4 Punto immagine.

Si supponga che il punto oggetto P si trovi sull'asse ottico principale (o poco distante da esso) alla distanza di diversi raggi di curvatura dallo specchio. Sotto queste ipotesi il punto P si può considerare a distanza infinita dallo specchio in quanto i raggi uscenti da P vanno a incidere sullo specchio con direzioni praticamente parallele. Per costruire graficamente il punto immagine P' del punto oggetto P occorre scegliere, tra gli infiniti raggi uscenti da P , due raggi incidenti per i quali sia facile la determinazione dei raggi riflessi. Si consideri, per esempio,

- il raggio incidente PS parallelo all'asse ottico principale. Il suo raggio riflesso passa per il fuoco F ;
- il raggio incidente PS' passante per il centro di curvatura O . Il suo raggio riflesso coincide con PS' perchè l'angolo di incidenza è nullo².

Se le condizioni di stigmatismo sono rispettate, si è certi che là dove si incontrano questi due raggi riflessi passeranno anche gli altri raggi riflessi, dando luogo all'immagine P' .

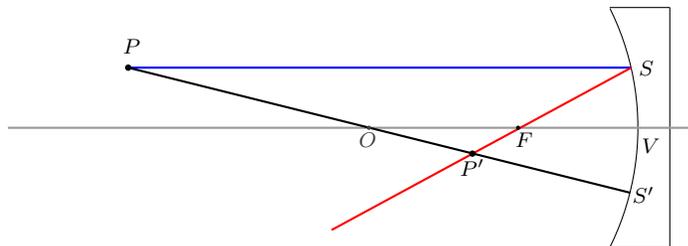


Figura 6: Immagine in uno specchio sferico concavo. P' è l'immagine del punto oggetto P .

3.5 Equazione dei punti coniugati.

Per la *reversibilità del cammino dei raggi luminosi*, se il punto oggetto P ha per immagine P' allora i punti P e P' possono scambiarsi i rispettivi ruoli di oggetto e immagine; per tale motivo si dicono *punti coniugati*.

Si consideri ora uno specchio sferico concavo, un punto oggetto P sull'asse ottico principale e la sua immagine Q .

²Alternativamente si può considerare il raggio incidente uscente da P e passante per il fuoco F . Esso riflettendosi risulta parallelo all'asse ottico

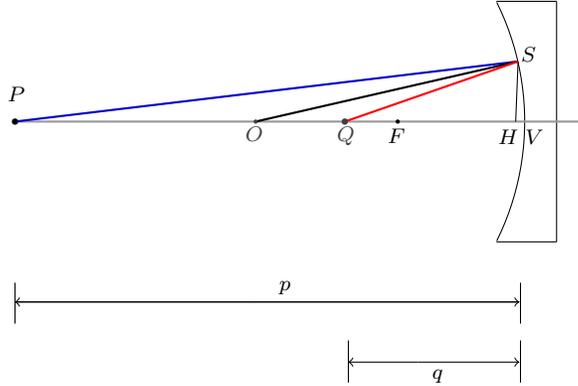


Figura 7: Punti coniugati.

Gli angoli \widehat{PSO} e \widehat{OSQ} sono uguali, ovvero il segmento OS è bisettrice dell'angolo in S del triangolo PSQ . Poichè la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati, si ottiene:

$$\frac{PS}{QS} = \frac{PO}{OQ}$$

Se p, q indicano le distanze dallo specchio della coppia di punti coniugati P, Q e se valgono le approssimazioni di Gauss, ossia per angoli di incidenza piccoli, si ottiene:

$$PS \approx PV = p$$

$$QS \approx QV = q$$

Quindi:

$$\frac{p}{q} = \frac{p - R}{R - q}$$

$$pR + qR = 2pq$$

Infine, dividendo l'ultima uguaglianza per pqR si ottiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \tag{3.1}$$

L'uguaglianza (3.1) è detta *equazione dei punti coniugati*. Si tenga presente che nel caso di immagini virtuali e/o di specchi convessi, le distanze q (immagine) e f (focale) si devono considerare negative quando non cadono nello spazio ottico reale (cioè dalla parte dello specchio dove esso effettivamente riflette). In questo caso si parla rispettivamente di immagine e fuoco virtuali.

3.6 Immagini in specchi sferici.

Si verificano i seguenti fatti:

1. Se l'oggetto si trova "all'infinito", la sua immagine è nel piano focale dello specchio (piano passante per F e perpendicolare all'asse ottico principale). Essa risulta rimpicciolita e capovolta.
2. Se l'oggetto si trova nel piano focale la sua immagine è "all'infinito", ingrandita e capovolta.
3. Se l'oggetto si trova tra il centro di curvatura O e l'infinito, l'immagine si forma tra F e O , capovolta e rimpicciolita, e viceversa, scambiando oggetto e immagine.
4. Se l'oggetto si trova nel centro di curvatura O , l'immagine, capovolta e di pari dimensioni, si trova pure in O .
5. Se l'oggetto si trova tra il fuoco F e lo specchio, utilizzando la solita costruzione si scopre che i raggi riflessi divergono, e giungono all'osservatore che guarda dentro lo specchio come se provenissero da un punto situato dietro lo specchio. Si ha quindi un'immagine virtuale (non potremmo raccoglierla su uno schermo), dritta e ingrandita. E' questo il modo di usare uno specchio concavo come specchio d'ingrandimento.

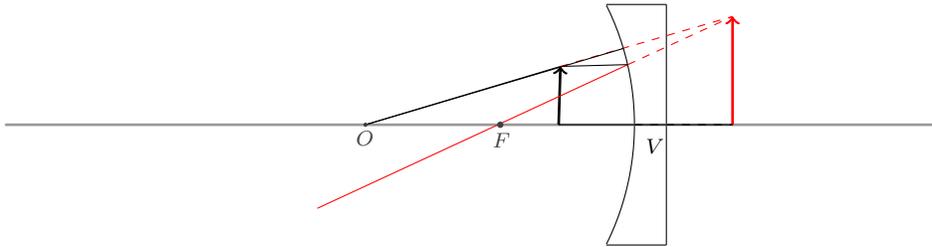


Figura 8: L'oggetto è il vettore (di colore nero) posto tra il fuoco e lo specchio. L'immagine (virtuale) è rappresentata dal vettore di colore rosso.

4 Specchi parabolici

Gli specchi parabolici (calotte riflettenti a forma di paraboloide) presentano il vantaggio di essere rigorosamente stigmatici (e non solo approssimativamente, come quelli sferici). I raggi paralleli all'asse ottico principale si riflettono passando esattamente per il fuoco della parabola. Questi tipi di specchi vengono usati nei proiettori (una sorgente di luce posta nel fuoco dà luogo a un fascio di raggi riflessi paralleli, con poca dispersione) e negli obiettivi (per es. di telescopi astronomici).

5 Rifrazione. Legge di Snell.

Quando un raggio di luce incontra la superficie di separazione tra due mezzi trasparenti e isotropi (per esempio aria-acqua, aria-vetro, eccetera), parte di esso si riflette e parte si trasmette (ovvero si rifrange) nel secondo mezzo, cambiando generalmente direzione. Si verifica quanto segue

- il raggio incidente, quello riflesso e quello rifratto sono complanari (cioè appartengono ad un medesimo piano);

- l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono uguali (legge della riflessione):

$$\hat{i} = \hat{r}$$

- l'angolo di incidenza e quello di rifrazione variano secondo la seguente uguaglianza (detta legge di Snell)

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}'} = k \quad (5.1)$$

dove k è un numero costante che si chiama **indice di rifrazione**.

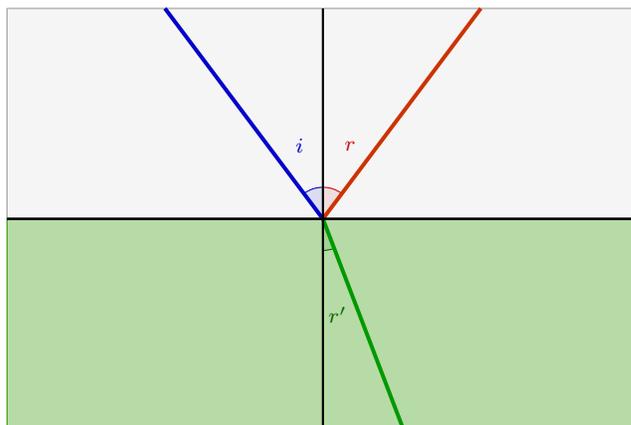


Figura 9: Il raggio incidente (di colore blu) viene in parte riflesso (raggio rosso) e in parte rifratto (raggio verde).

5.1 Indici di rifrazione

Si consideri un raggio luminoso che passa dal mezzo 1 al mezzo 2. Se ϑ_1 e ϑ_2 indicano rispettivamente l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione, dalla legge di Snell si ha:

$$n_{12} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \quad (5.2)$$

Il numero n_{12} è costante e indica l'*indice di rifrazione relativo* nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2.

Se invece un raggio luminoso passa dallo *spazio vuoto* al mezzo 2 il numero

$$n_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \quad (5.3)$$

indica l'*indice di rifrazione assoluto* del mezzo 2. Gli indici di rifrazione assoluti (numeri adimensionali maggiori di uno) consentono di ricavare gli indici di rifrazione relativi, infatti

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.4)$$

Utilizzando l'uguaglianza 5.4 la legge di Snell diventa

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.5)$$

Osservazione.

- Se $n_2 > n_1$ si ha $\frac{n_2}{n_1} > 1$ e $\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} > 1$. Quindi deve essere $\sin \vartheta_1 > \sin \vartheta_2$ e $\vartheta_1 > \vartheta_2$. *Se un raggio luminoso passa dal mezzo 1 al mezzo 2 e $n_2 > n_1$ allora il raggio rifratto si avvicina alla normale.*

- Se $n_2 < n_1$ si ha $0 < \frac{n_2}{n_1} < 1$ e $0 < \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} < 1$. Quindi deve essere $\sin \vartheta_1 < \sin \vartheta_2$ e $\vartheta_1 < \vartheta_2$. *Se un raggio luminoso passa dal mezzo 1 al mezzo 2 e $n_2 < n_1$ allora il raggio rifratto si allontana dalla normale.*