# Funzioni

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Settembre 2012.[1]

## Indice



# 1 Funzioni

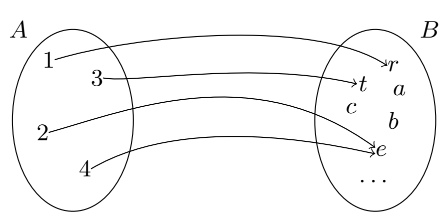
**Definizione 1.1.** *Una* $\boxed{\text{funzione}}$ $f$ *da* $A$ *in* $B$ *consiste di:*

1. *un insieme* $A$ *detto* dominio *della funzione;*
2. *un insieme* $B$ *detto* codominio *della funzione;*
3. *una* regola o azione f *che assegna ad* ogni *elemento* $a$ *del dominio un* unico *elemento* $b$ *del codominio.*

L'elemento $b$ si chiama *immagine* di $a$ tramite $f$ e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: "$f$ di $a$"). Si scrive $A \xrightarrow{f} B$ oppure $f : A \longrightarrow B$ per denotare una funzione $f$ il cui dominio è $A$ e il cui codominio è $B$.

**Esercizio 1.2.** *Si consideri la funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *così definita:*

1. $A$ $= \{1, 2, 3, 4\}$
2. $B$ $= \{$*Tutte le lettere dell'alfabeto*$\}$
3. $f$ = *la regola che associa al numero* 1 *la lettera* $r$, *al numero* 3 *la lettera* $t$ *e ai numeri* 2 *e* 4 *la lettera* $e$.




Quello della figura è un disegno della situazione, che chiamiamo $\boxed{\textit{diagramma interno}}$ della funzione. Per indicare che la regola $f$ associa al numero 1 la lettera $r$ scriviamo $f(1) = r$. Cosa dobbiamo scrivere negli altri casi?

[1] Nome File: funzioni-1-2012.tex

La funzione $A \xrightarrow{f} B$ rappresenta una parola di quattro lettere, quale?

Una qualunque parola (anche priva di significato) di lunghezza $n$ è una funzione (specificare dominio e codominio)

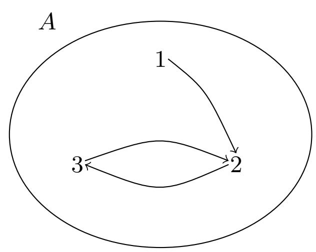
Ci sono alcuni aspetti generali che sono comuni a tutti i diagrammi interni di una funzione:

1. *per ogni* punto del dominio c'è *esattamente* una freccia che parte da quel punto;
2. dato un punto del codominio è ammesso un numero qualunque di frecce che arriva in quel punto: zero, una o più di una.

La cosa fondamentale è dunque questa: da ogni punto del dominio deve partire esattamente una freccia che lo collega a un elemento del codominio.

Si osservi che nella precedente discussione non è escluso che dominio e codominio siano lo stesso insieme: una funzione per la quale il dominio sia uguale al codominio, si chiama $\boxed{\textit{endofunzione}}$.

**Esempio.** Si consideri l'endofunzione $A \xrightarrow{g} A$ dove $A = \{1, 2, 3\}$ e la regola $g$ è così definita: l'elemento 1 è associato all'elemento 2, l'elemento 2 è associato all'elemento 3 e infine, l'elemento 3 è associato all'elemento 2. Tale funzione può essere rappresentata graficamente mediante il seguente diagramma interno:




**Definizione 1.3** (**Punti fissi di una endofunzione**). *Si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} A$, $y = f(x)$. I* punti fissi di $f$ *sono gli elementi $x \in A$ per i quali risulta $f(x) = x$.*

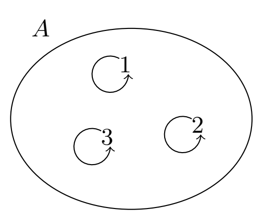
## 1.1 Funzione identità

Per ogni insieme $A$, esiste una particolare endofunzione, detta $\boxed{\textit{funzione identità}}$ di $A$ che denotiamo con la scrittura:

$$A \xrightarrow{1_A} A$$

La funzione identità di $A$ è definita nel modo seguente: il dominio e il codominio di $1_A$ sono l'insieme $A$ stesso, e $f(x) = x$ per ogni elemento $x$ in $A$.

Se, ad esempio, $A = \{a, b, c\}$ allora la *funzione identità* di $A$ si può rappresentare così:



## 1.2 Composizione di funzioni

Se $f$ e $g$ sono due funzioni per le quali *il codominio di* $f$ *coincide con il dominio di* $g$, ossia

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora si può costruire una nuova funzione $g \circ f$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

definendo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

per ogni $x$ in $A$. (Talvolta si denota più semplicemente la funzione composta $g \circ f$ con $gf$).

Possiamo visualizzare la situazione con il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Si noti che la funzione composta $g \circ f$ non è sempre definita: è definita soltanto quando il codominio di $f$ coincide con il dominio di $g$.

**Esercizio 1.4.** *Siano* $A = \{Tutti\, gli\, uomini\}$ *e* $B = \{Tutte\, le\, donne\}$. *Considerare la funzione* $`madre' : A \longrightarrow B$ *che assegna ad ogni uomo sua madre e la funzione* $`padre' : B \longrightarrow A$ *che assegna ad ogni donna suo padre. La situazione puó essere schematizzata così*

$$\{Tutti\, gli\, uomini\} \xrightarrow{`madre'} \{Tutte\, le\, donne\}$$

$$\{Tutti\, gli\, uomini\} \xleftarrow{`padre'} \{Tutte\, le\, donne\}$$

*Analizzare le funzioni composte* $madre \circ padre$ *e* $padre \circ madre$ *e dire che cosa rappresentano.*

## 1.3 Proprietà della composizione di funzioni

Valgono inoltre le leggi seguenti:

LEGGI D'IDENTITA' *Se* $A \xrightarrow{f} B$, *allora*

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f \tag{1.1}$$

Dunque commutano i diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

LEGGE ASSOCIATIVA *Se*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

*allora*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.2}$$

Dunque per la legge dell'associatività, il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

La legge associativa permette di tralasciare la parentesi e scrivere semplicemente $h \circ g \circ f$ (oppure $hgf$).

## 1.4 Funzioni invertibili

**Definizione 1.5.** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* invertibile *se esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *per cui risulti:*

$$g \circ f = 1_A \quad e \quad f \circ g = 1_B$$

*Una tale funzione g (se esiste) si chiama* funzione inversa *di f.*

**Esercizio 1.6.** *Siano Sia* $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione e* $B \xrightarrow{g} A$ , $B \xrightarrow{g'} A$ *siano* entrambe *inverse di* $f$. *Allora* $g = g'$.

Soluzione

$$\begin{array}{rll}
g = & g \circ 1_B & \text{(definizione di funzione identitá)} \\
= & g \circ (f \circ g') & (g' \text{ è l'inversa di } f) \\
= & (g \circ f) \circ g' & \text{(proprietá associativa della composizione di funzioni)} \\
= & 1_A \circ g' & (g \text{ è l'inversa di } f) \\
= & g' & \text{(definizione di funzione identitá).}
\end{array}$$

**Osservazione** Se $A \xrightarrow{f} B$ ha inversa, allora l'inversa (che è unica) si denota con il simbolo $f^{-1}$.

**Esercizio 1.7.** *Siano* $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *funzioni invertibili. Allora* $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ *è invertibile e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

*Soluzione.* Per definizione di inversa, per dimostrare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ si deve provare che

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z$$

e

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_X.$$

Ora

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_Z.\end{aligned}$$

Analogamente si prova $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$.

## 1.5 Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Consideriamo i seguenti esempi:

**Esempio.** Si considerino gli insiemi $A = \{Automobili\}$, $B = \{Targhe\}$ e la funzione $A \xrightarrow{f} B$, dove $f$ è la regola che permette di associare ad ogni auto la sua targa.

È importante che non vi siano due (o più ) automobili con lo stesso numero di targa in quanto, il numero di targa deve costituire il codice identificativo di ogni automobile .

**Esempio.** Si considerino gli insiemi $A = \{Telefoni\}$, $B = \{Numeri\}$ e la funzione $A \xrightarrow{f} B$, dove $f$ è la regola che permette di associare ad ogni telefono un numero telefonico.

E' importante che non vi siano due (o più) telefoni con lo stesso numero telefonico altrimenti componendo quel numero non saremmo certi di parlare con la persona desiderata.

Le due funzioni che abbiamo appena esaminato sono caratterizzate da questa importante proprietà: *a elementi distinti del dominio sono associati elementi distinti del codominio*[2].

**Definizione 1.8 (Funzioni iniettive.).** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* iniettiva *se associa ad elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio, cioè se soddisfa la seguente condizione:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \qquad se\ f(x_1) = f(x_2),\ allora\ x_1 = x_2.$$

**Esercizio 1.9.** *Disegnare due diagrammi interni di funzioni iniettive e due di funzioni che non lo sono.*

**Esercizio 1.10.** *Dati gli insiemi* $A = \{0, 1\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$ *determinare tutte le possibili funzioni* iniettive *da* $A$ *in* $B$ *e disegnare i relativi diagrammi interni. Quante sono?*

[2] In altre parole, riferendoci ai diagrammi esterni *due frecce non devono mai confluire in uno stesso elemento.*

**Esempio.** Si considerino gli insiemi $A = \{Persone\}$, $B = \{Comuni\}$ e la funzione

$A \xrightarrow{f} B$ dove $f$ è la regola che permette di associare ad ogni persona il proprio comune di residenza.

Notate che ogni elemento di $B$ è raggiunto da almeno una freccia (qui si suppone che non esistano comuni disabitati). Questa è la proprietà che caratterizza le funzioni suriettive.

**Definizione 1.11 (Funzioni suriettive.).** *Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice* suriettiva *se ogni elemento di $B$ è il corrispondente di almeno un elemento di $A$ cioè se*

$$\forall b \in B \qquad \exists a \in A \qquad per\, cui\, risulta: \;\; f(a) = b.$$

L'insieme di tutti i valori che assume la funzione si dice *immagine* di A secondo $f$ e si indica con $\mathrm{Im}\,(f)$ (oppure con $f(A)$); dunque, il fatto che $f$ sia suriettiva si può anche esprimere dicendo che *l'immagine di $A$ coincide con $B$*, cioè

$$\mathrm{Im}\,(f) = B$$

---

Un'altra categoria di funzioni molto importanti in matematica è quella delle *funzioni biunivoche* cioè di quelle funzioni che sono sia iniettive che suriettive. Diamo allora l'ultima definizione di questo paragrafo.

**Definizione 1.12.** *Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice* biunivoca *se è, allo stesso tempo, iniettiva e suriettiva.*

**Esercizio 1.13.** *Gli insiemi $A$ e $B$ siano rispettivamente il dominio e il codominio di una funzione $f : A \longrightarrow B$. Disegnare, quando è possibile, i diagrammi interni di una funzione biunivoca nei seguenti tre casi:*

$$\begin{array}{lll} a] & A = \{x_1, x_2\} & B = \{y_1, y_2, y_3\}; \\ b] & A = \{x_1, x_2, x_3\} & B = \{y_1, y_2, \}; \\ c] & A = \{x_1, x_2, x_3\} & B = \{y_1, y_2, y_3\}; \end{array}$$

**Esercizio 1.14.** *Sia $X \xrightarrow{f} Y$ una funzione da un insieme $X \neq \emptyset$ a un insieme $Y$. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

*$\alpha$) $f$ è iniettiva;*

*$\beta$) $f$ ha un'inversa sinistra, cioè esiste una funzione $Y \xrightarrow{g} X$ (non necessariamente unica) per la quale $g \circ f = 1_X$.*

*Soluzione.* $\alpha) \Rightarrow \beta)$ Dobbiamo trovare una $Y \xrightarrow{g} X$ in modo tale che $g \circ f = 1_X$. Per ogni $y \in Y$, definiamo $g(y)$ nel modo seguente:

se $y \in Im(f)$, esiste, per ipotesi, *esattamente un* $x \in X$ per il quale $f(x) = y$; poniamo allora per definizione $g(y) = x$;

se invece $y \notin Im(f)$, definiamo $g(y) \in X$ in modo del tutto arbitrario: per esempio, scegliamo un elemento $x_0 \in X (\neq \emptyset)$ e per ogni $y \in Y$, $y \notin Im(f)$, poniamo $g(y) = x_0$.

Allora è facile vedere che $g \circ f = 1_X$. Naturalmente di inverse sinistre ne possono esistere più d'una.

$\beta) \Longrightarrow \alpha)$ Per ogni $x, x' \in X$

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Longrightarrow x = x'.$$

Dunque $f$ è iniettiva.

**Esercizio 1.15.** *Siano* $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ *funzioni,* $X (\neq \emptyset)$. *Provare:*

*a)* $f, g$ *iniettive* $\Rightarrow g \circ f$ *iniettiva;*

*b)* $f, g$ *suriettive* $\Rightarrow g \circ f$ *suriettiva;*

*c)* $g \circ f$ *iniettiva* $\Rightarrow f$ *iniettiva;*

*d)* $g \circ f$ *suriettiva* $\Rightarrow g$ *suriettiva;*

*Soluzione.* (Cenni)

*a)* $1^a$ *Dimostrazione.* Per ogni $x, x' \in X$:

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') & \Longleftrightarrow & g(f(x)) = g(f(x')) & (\text{def. di } g \circ f) \\ & \Longrightarrow & f(x) = f(x') & (g \text{ è iniettiva}) \\ & \Longrightarrow & x = x' & (f \text{ è iniettiva}) \end{array}$$

Questo prova che $g \circ f$ è iniettiva.

*a)* $2^a$ *Dimostrazione.* Sappiamo (Esercizio 1.14) che una funzione (con dominio non vuoto) è iniettiva se e solo se ha un'inversa sinistra. Siano allora $h$ e $k$ inverse sinistre rispettivamente di $f$ e $g$: questo significa che $hf = 1_X$ e $kg = 1_Y$. Allora

$$(h \circ k) \circ (g \circ f) = h \circ (k \circ g) \circ f = h \circ 1_Y \circ f = h \circ f = 1_X.$$

Questo prova che $h \circ k$ è un'inversa sinistra di $g \circ f$, e quindi che $g \circ f$ è iniettiva.

*c)* Diamo due dimostrazioni.

$1^a$ *Dimostrazione.* Per ogni $x, x' \in X$:

$$\begin{array}{ccccl} f(x) & = & f(x') & & \\ & \Downarrow & & & \\ g(f(x)) & = & g(f(x')) & & \\ & \Updownarrow & & & \\ (g \circ f)(x) & = & (g \circ f)(x') & & \\ & \Updownarrow & & & (g \circ f \text{ è iniettiva}) \\ x & = & x' & & \end{array}$$

Questo prova che $f$ è iniettiva.

$2^a$ *Dimostrazione.* Poiché $g \circ f$ è iniettiva, ha un'inversa sinistra (Esercizio 1.14). Questo significa che esiste $Z \xrightarrow{h} X$ per la quale $h \circ (g \circ f) = 1_X$. Per l'associatività della composizione di funzioni:

$$1_X = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ma allora $h \circ g$ è un'inversa sinistra di $f$, e pertanto $f$ è iniettiva.