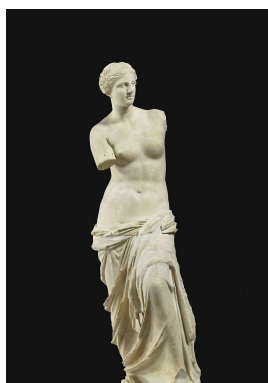


Alcuni risultati della matematica greca

A cura di
Mauro Saita

e

Gli studenti della classe Seconda - Sez. E
Liceo Scientifico “L. Cremona” (Milano). A.S. 2025 - 2026



Per commenti, critiche o segnalazioni di errori scrivere, per favore a:

maurosaita@tiscalinet.it

Indice

1	Sezione aurea.	4
1.1	Rettangolo aureo	4
1.2	Triangolo aureo	5
1.3	Pentagono aureo	6
1.4	Successione di Fibonacci.	7
2	Il rapporto aureo in arte e natura	8
2.1	Partenone	8
2.2	L'uomo vitruviano	8
2.3	La Venere di Botticelli	8
2.4	La flagellazione di Piero della Francesca	9
2.5	Castel del Monte	9

2.6	Nautilus	9
3	Teorema di Pitagora	10
3.1	Dimostrazione di Penrose	10
3.2	Dimostrazione di Euclide. (Elementi, Libro I, Proposizione 47)	12
3.3	Il teorema di Tolomeo	14
3.4	Dimostrazioni visive	16
3.5	Versione generalizzata del teorema di Pitagora	17
4	Solidi platonici e solidi archimedei	20
4.1	I cinque solidi platonici disegnati da Leonardo	20
4.2	Il pallone da calcio è un solido archimedeo	22
5	Lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili	23
6	Area del cerchio. La dimostrazione di Archimede.	25
7	Sulla sfera e sul cilindro.	27

L'attività è stata suddivisa nei gruppi elencati qui sotto. In grassetto sono riportati i responsabili di ciascun gruppo; la data si riferisce alla data di presentazione del lavoro svolto.

1. Sezione aurea. **Sollami**, Calogero, Falcone, Valdez. Lunedì, 23 marzo 2026.
2. Sezione aurea in arte e natura. **Conti**, Rapuano, Eduardo, Rojas. Martedì, 24 marzo 2026.
3. Teorema di Pitagora. **Runci**, Poli, Votta, Ferrer. Sabato, 28 marzo 2026.
4. Area del cerchio. **Sorgente**, Hu Bin, Barile, Grilli. Lunedì, 30 marzo 2026.
5. Solidi platonici e archimedei. **Mastropasqua**, Johansen James, Pedone, Borzini. Martedì, 31 marzo 2026.
6. Sfera e cilindro. **Volterrani**, Parazzini, Liloia, De Cesare. Sabato, 11 aprile 2026
7. Volume della sfera. **Espinoza**, Hu Sofia, Hajderaj, Torti. Lunedì, 13 aprile 2026

I Sezione aurea.

La sezione aurea è un'invenzione della scuola pitagorica.

Definizione I.1. È dato un segmento AB di lunghezza L . Si chiama sezione aurea di AB , la sua parte AC che risulta essere media proporzionale tra il segmento e la parte restante. Si chiama rapporto aureo il rapporto tra la lunghezza del segmento e la sua sezione aurea.

Posto $AC = x$, $CB = L - x$. Da $L : x = x : (L - x)$ si ottiene:

$$x^2 = L(L - x) \quad (I.1)$$

Dividendo per $x^2 \neq 0$ si ottiene:

$$\left(\frac{L}{x}\right)^2 - \left(\frac{L}{x}\right) - 1 = 0 \quad (I.2)$$

Trascurando la soluzione negativa si ricava il rapporto aureo

$$\Phi = \frac{L}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618033989 \dots \quad (I.3)$$

In modo del tutto analogo, se dividiamo ogni termine dell'uguaglianza (I.1) per $L^2 \neq 0$ si ottiene:

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right) - 1 = 0 \quad (I.4)$$

La cui soluzione positiva $\Phi^{-1} = \frac{x}{L} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033989 \dots$

Si può notare che le parti decimali di Φ e Φ^{-1} sono le stesse. Non solo, anche Φ^2 ha le medesime cifre decimali di Φ ; infatti: $\Phi^2 = 2,618033989 \dots$. Per convincersene basta verificare che valgono le seguenti due uguaglianze

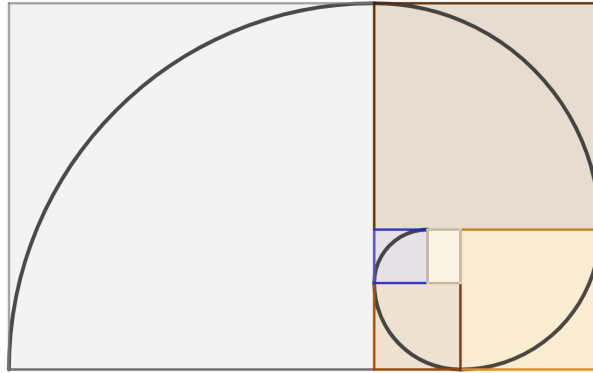
$$\Phi^{-1} = \Phi - 1 \quad (I.5)$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (I.6)$$

I.1 Rettangolo aureo

Ogni rettangolo^I R lo si può pensare formato da un quadrato Q_1 e da una parte rimanente R_1 che è a sua volta un rettangolo. Se la parte rimanente R_1 risulta simile a R quest'ultimo si dice "aureo".

^IPiù precisamente, ogni rettangolo che non sia un quadrato.

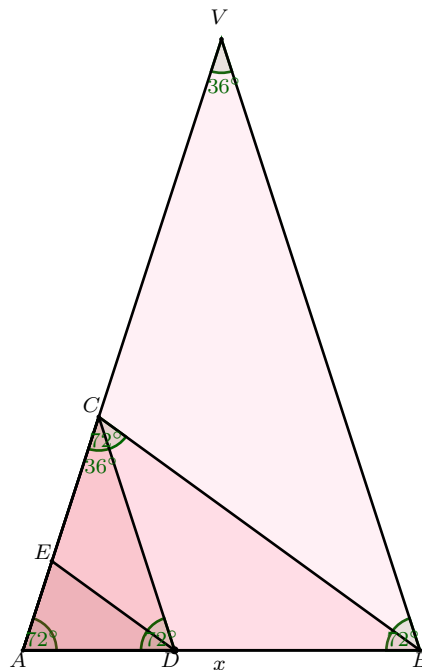


1.2 Triangolo aureo

Il triangolo isoscele i cui angoli alla base misurano 72° (e l'angolo al vertice è di 36°) è *aureo* perché il rapporto tra il lato obliquo e la base è uguale al numero aureo. La verifica è immediata: se scegliamo (senza ledere la generalità di quanto stiamo per dire) il lato obliquo del triangolo ABV uguale a 1 e la base $AB = x$. Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{VAB}$; si ottiene il triangolo isoscele ABC che è simile al triangolo dato VAB . Dalla proporzione

$$1 : x = x : (1 - x) \quad (1.7)$$

si ottiene l'equazione $x^2 + x - 1 = 0$, la cui soluzione positiva è $x = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{1}{x} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)



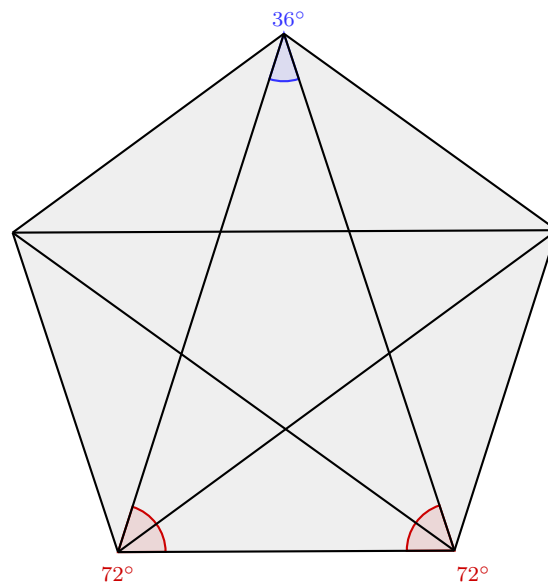
In altre parole abbiamo suddiviso il triangolo aureo VAB in due triangoli isosceli:

- il triangolo VBC i cui angoli alla base misurano 36° e l'angolo al vertice 108°
- il triangolo aureo ABC i cui angoli alla base misurano 72° e l'angolo al vertice 36°

Il procedimento si può iterare: se tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB} = 72^\circ$, il triangolo ACB risulta suddiviso nel triangolo isoscele DCB (i cui angoli alla base misurano 36° e l'angolo al vertice 108°) e il triangolo aureo ADC e così via. Si può proseguire all'infinito generando triangoli aurei sempre più piccoli ...

1.3 Pentagono aureo

Ogni pentagono regolare è “aureo” nel senso che contiene tre triangoli isosceli aventi gli angoli di base pari a 72° e l'angolo al vertice di 36° . Come sappiamo, il rapporto tra lato obliquo e base è uguale al numero aureo $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033989 \dots$



1.4 Successione di Fibonacci.

La successione F_n di Fibonacci è così definita

$$\begin{cases} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases} \quad (1.8)$$

I primi termini di questa successione sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .

Un risultato interessante è il seguente: per n molto grande, più precisamente per n che tende a $+\infty$ Il rapporto tra due termini consecutivi della successione di Fibonacci tende al numero aureo

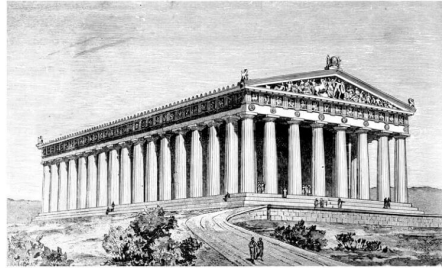
$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \longrightarrow \Phi \quad (1.9)$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

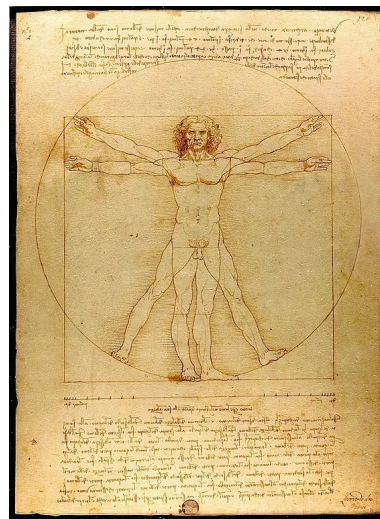
2 Il rapporto aureo in arte e natura

Ci limitiamo qui a riportare un elenco di immagini che hanno a che fare con la sezione aurea che sono state scelte dagli studenti della classe.

2.1 Partenone



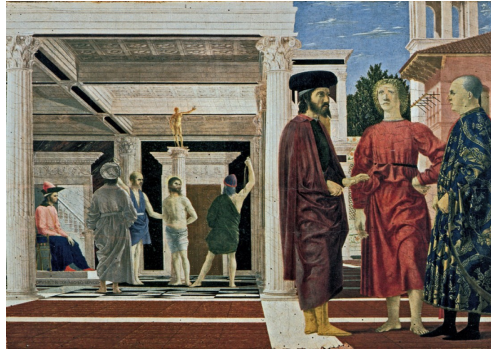
2.2 L'uomo vitruviano



2.3 La Venere di Botticelli



2.4 La flagellazione di Piero della Francesca



2.5 Castel del Monte



2.6 Nautilus



3 Teorema di Pitagora

Quanto stiamo per dire in questa sezione presuppone la conoscenza del seguente fatto

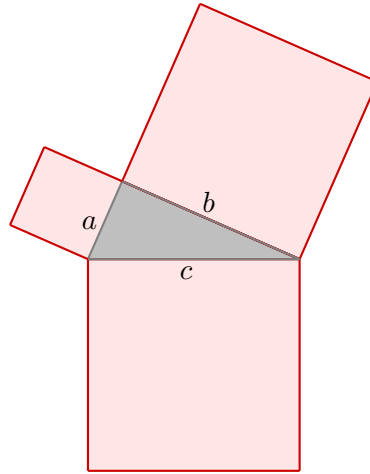
Lemma 3.1. *Se due poligoni simili hanno rapporto di similitudine k allora il rapporto tra le loro aree è uguale a k^2 .*

Una dimostrazione di questo lemma fondamentale è riportata nel libro di testo.

3.1 Dimostrazione di Penrose

In questo paragrafo enunciamo il teorema di Pitagora e lo dimostriamo utilizzando la bellissima dimostrazione di Roger Penrose².

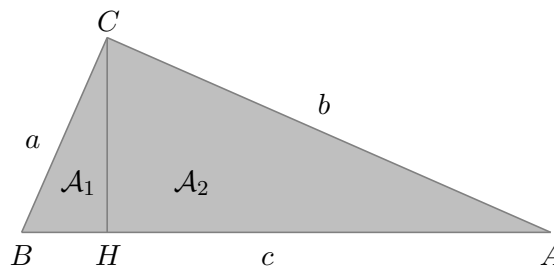
Teorema 3.1 (Teorema di Pitagora). *È dato un triangolo rettangolo di cateti a, b e ipotenusa c .*



L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.1)$$

Dimostrazione (di Penrose).



²Roger Penrose (1931 - ...) matematico, fisico-matematico e cosmologo, ha ricevuto il premio Nobel per la Fisica nel 2020 per aver dimostrato che i buchi neri sono una inevitabile conseguenza della teoria della relatività generale di Einstein.

Se, nel triangolo ABC , tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa otteniamo tre triangoli rettangoli simili tra loro: il triangolo di partenza ABC e i triangoli CBH e CHA . Se indichiamo con $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ le aree dei tre triangoli otteniamo

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

$$1 = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}}$$

$$1 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

QED

3.2 Dimostrazione di Euclide. (Elementi, Libro I, Proposizione 47)

Elementi, Libro I - Proposizione 47

Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.

Qui forniamo solamente tre figure chiave per mezzo delle quali lo studente può ricostruire la dimostrazione.

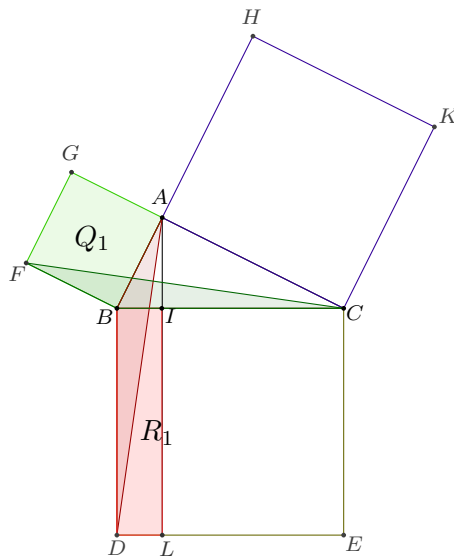


Figura 1

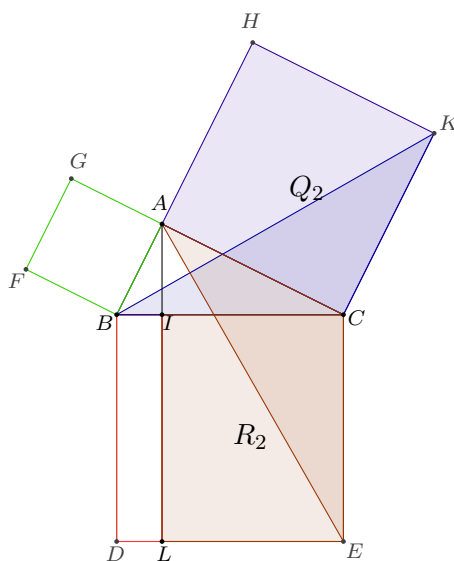


Figura 2

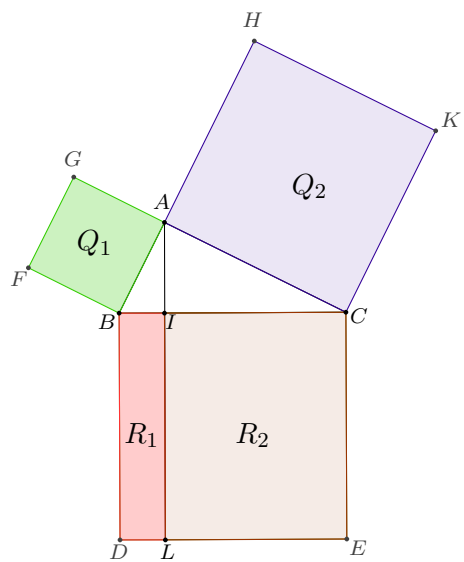


Figura 3

3.3 Il teorema di Tolomeo

Il famoso teorema che qui presentiamo è stato attribuito al famoso astronomo dell'antichità Claudio Tolomeo (85 dc - 165 dc) anche se, molto probabilmente era già nota ai tempi di Apollonio (Perga 262 ac - Alessandria d'Egitto 190 ac).

Il teorema è contenuto nella celebre opera di Claudio Tolomeo, il cui titolo *Composizione matematica* venne mutato dai suoi ammiratori in *Grande composizione* (Μεγάλη Σύνταξις) ed è passato alla storia col nome arabo di *Almagesto*, 'Il Grandissimo' oppure 'Il Massimo'.

Teorema 3.2 (di Tolomeo). *Sia $ABCD$ un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza.*

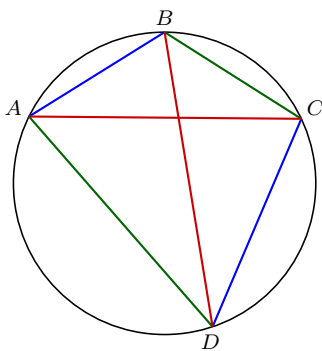


Figura 4

Il prodotto delle sue diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti

$$AC \cdot DB = (AB \cdot CD) + (BC \cdot AD)$$

Dimostrazione.

Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto in una circonferenza³.

Consideriamo sulla diagonale AC il punto E tale che $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$.

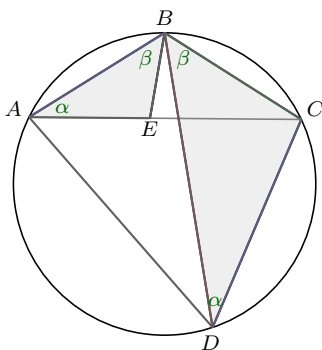


Figura 5

Osserviamo la figura (5): i triangoli (evidenziati in grigio) ABE e DBC sono simili per il primo criterio di similitudine. Infatti, essi hanno:

³Ricordiamo che un quadrilatero è *inscrittibile* in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari mentre è *circoscrittibile* ad una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

- $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$, per costruzione;
- $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ perché insistono sullo stesso arco BC .

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BD} \quad (3.2)$$

$$AE \cdot BD = AB \cdot CD \quad (3.3)$$

Osserviamo ora la figura 6 .

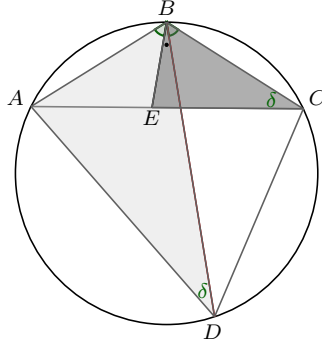


Figura 6

I triangoli (evidenziati in grigio e parzialmente sovrapposti) ABD e BCE sono simili per il primo criterio di similitudine. Infatti, essi hanno:

- $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$, perché somma di angoli uguali;
- $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ perché insistono sullo stesso arco AB .

$$\frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \quad (3.4)$$

$$EC \cdot BD = BC \cdot AD \quad (3.5)$$

Sommando membro a membro le uguaglianze (3.3) e (3.5) otteniamo:

$$(BD \cdot AE) + (BD \cdot EC) = (AB \cdot CD) + (AD \cdot CB)$$

$$BD \cdot (AE + EC) = (AB \cdot CD) + (AD \cdot CB)$$

$$BD \cdot AC = (AB \cdot CD) + (AD \cdot CB)$$

QED

Se scegliamo come quadrilatero un rettangolo, dal teorema di Tolomeo si deduce immediatamente il teorema di Pitagora; basta fare la figura e ricordare che le diagonali di un rettangolo sono uguali ...

3.4 Dimostrazioni visive

1. Dimostrazione cinese. Chou-pei Suan-ching, 250 A.C.

Nella figura riportata qui sotto il quadrato grande di lato $a+b$ è formato da quattro triangoli rettangoli di cateti a , b e da un quadrato più piccolo di lato c . Abbiamo

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

ovvero

$$a^2 + b^2 = c^2$$

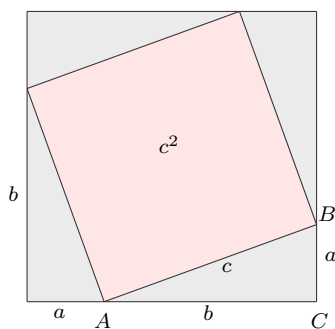


Figura 7:

2. Esistono tantissime dimostrazioni visive del Teorema di Pitagora facilmente reperibili in rete.

3.5 Versione generalizzata del teorema di Pitagora

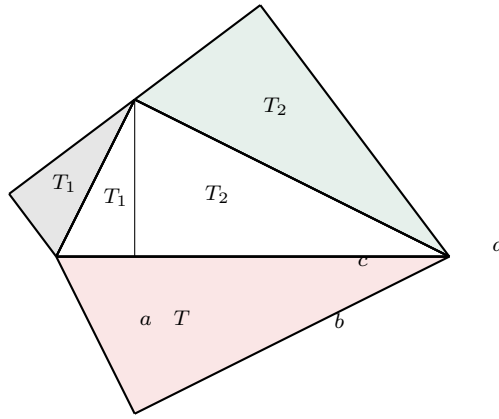
Vediamo ora la seguente generalizzazione del Teorema di Pitagora.

Teorema 3.3 (Teorema di Pitagora in forma generalizzata). *In ogni triangolo rettangolo l'area del poligono P costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei poligoni simili a P , costruiti sui due cateti.*

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2) \quad (3.6)$$

Dimostrazione.

Se, nel triangolo dato T , tracciamo l'altezza relativa all'ipotenusa, esso risulta diviso in due triangoli rettangoli T_1, T_2 entrambi simili a T (la verifica è immediata). Mediante tre simmetrie aventi per assi i lati a, b, c del triangolo dato otteniamo la seguente figura



L'area di T è uguale alla somma delle aree di T_1 e T_2 :

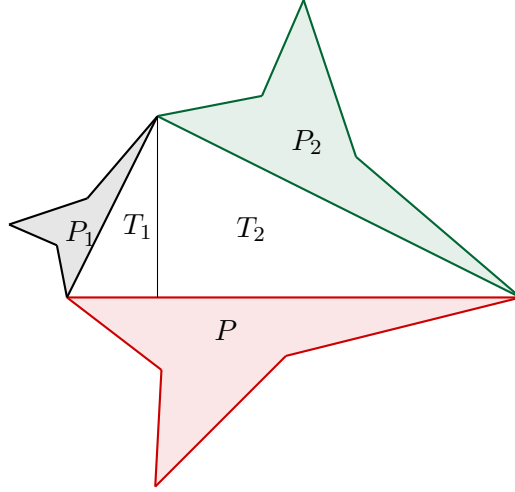
$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) \quad (3.7)$$

e dividendo per $\mathcal{A}(T)$ entrambi i membri di quest'ultima uguaglianza otteniamo

$$1 = \frac{\mathcal{A}(T_1)}{\mathcal{A}(T)} + \frac{\mathcal{A}(T_2)}{\mathcal{A}(T)} \quad (3.8)$$

dove, per il lemma 3.1, $\frac{\mathcal{A}(T_1)}{\mathcal{A}(T)} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$ e $\frac{\mathcal{A}(T_2)}{\mathcal{A}(T)} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$.

Osserviamo ora la figura qui sotto nella quale abbiamo sostituito i tre triangoli T, T_1, T_2 con tre poligoni simili (diciamo P quello costruito sull'ipotenusa c , P_1 quello costruito sul cateto a e P_2 quello costruito sul cateto b).



Ricordando ancora il lemma 3.1, notiamo che i rapporti tra le aree dei poligoni coincidono con quelli trovati precedentemente con i triangoli, cioè

$$\frac{\mathcal{A}(P_1)}{\mathcal{A}(P)} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{\mathcal{A}(T_1)}{\mathcal{A}(T)}$$

e

$$\frac{\mathcal{A}(P_2)}{\mathcal{A}(P)} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{\mathcal{A}(T_2)}{\mathcal{A}(T)}$$

Quindi, dall'uguaglianza 3.8 deduciamo che

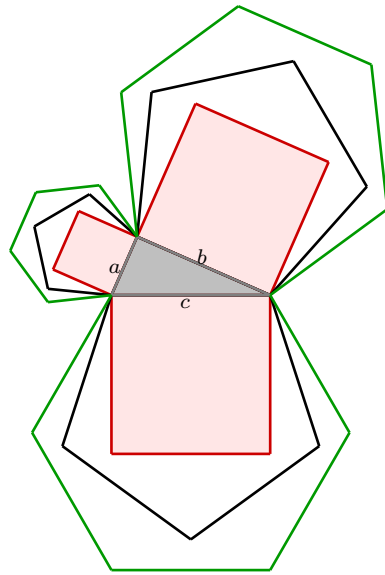
$$1 = \frac{\mathcal{A}(P_1)}{\mathcal{A}(P)} + \frac{\mathcal{A}(P_2)}{\mathcal{A}(P)}$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Q.E.D.

Questo teorema ci fa capire che la scelta di costruire dei quadrati su ogni lato del triangolo prevista dalla formulazione classica del teorema di Pitagora può essere sostituita dalla costruzione di tre qualsiasi poligoni, purché simili. Ad esempio possiamo scegliere di costruire su ogni lato del triangolo un poligono regolare di n lati, con n qualsiasi.

Per esempio, per $n = 5$ il teorema di Pitagora assume la seguente forma: *in ogni triangolo rettangolo l'area del pentagono regolare costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei pentagoni regolari costruiti sui cateti.*

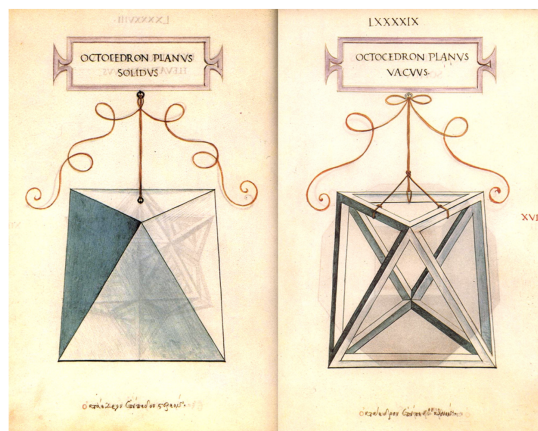
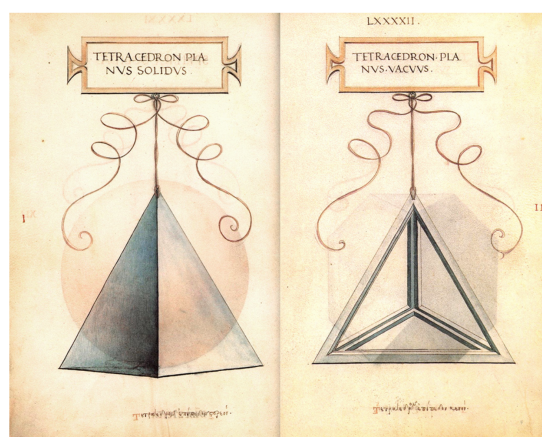


4 Solidi platonici e solidi archimedei

4.1 I cinque solidi platonici disegnati da Leonardo

Nel 1509 Luca Pacioli, matematico e frate francescano, scrive un libro dal titolo *La divina proporzione* divenuto famoso nei secoli. Leonardo da Vinci disegnerà per questo libro sessanta bellissimi disegni di cui qui sotto se ne riportano alcuni. Per maggiori dettagli sull'argomento consultare la presentazione fatta da un gruppo di studenti (classe 2E, Liceo Scientifico "L. Cremona", Milano, Anno Scolastico 2025 – 26) reperibile al seguente indirizzo:

http://maurosaita.it/seconda_matematica.html



4.2 Il pallone da calcio è un solido archimedeo ...

Questa figura dinamica, tratta dalla libreria di Geogebra, mostra chiaramente come il poliedro formato da 20 esagoni e 12 pentagoni (entrambi regolari) si possa ottenere troncando opportunamente un icosaedro.

<https://www.geogebra.org/m/kynwnkbg>

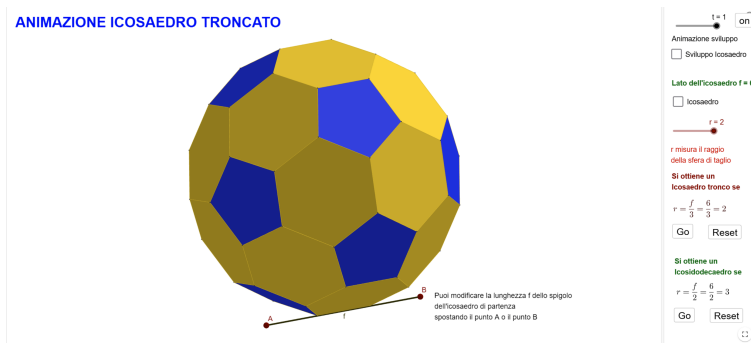


Figura 8: Dal sito: www.geogebra.org

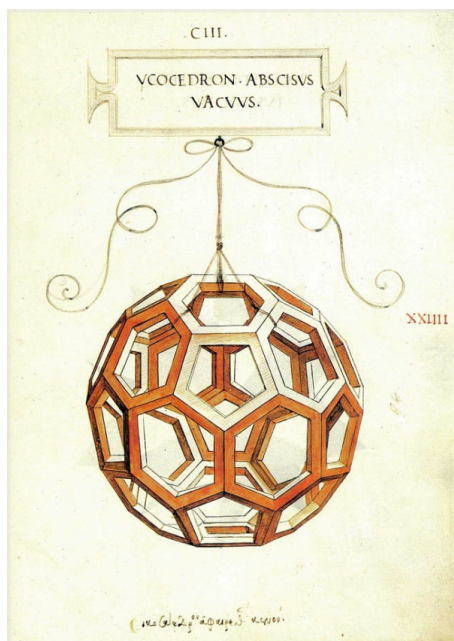


Figura 9: Icosaedro troncato disegnato da Leonardo. Il solido è ottenuto tagliando ogni vertice a $\frac{1}{3}$ della misura del lato.

5 Lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili

Non sempre il rapporto delle misure di due quantità è esprimibile mediante una frazione, in altre parole non sempre la misura di una certa quantità è esprimibile mediante un numero razionale.

Consideriamo, ad esempio, il quadrato di lato uno e indichiamo con d la misura della sua diagonale. Il teorema di Pitagora afferma che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa, cioè $d^2 = 1 + 1 = 2$ e $d = \sqrt{2}$.

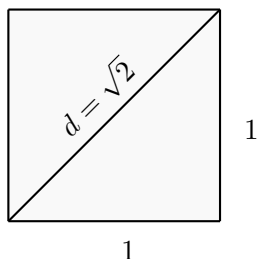


Figura 10: La diagonale del quadrato di lato 1 misura $\sqrt{2}$. Di che numero si tratta?

Vale il seguente risultato, generalmente attribuito alla Scuola pitagorica (~ 6 a.C.), che ha avuto conseguenze drammatiche al punto da mettere in crisi un intero impianto filosofico.

Teorema 5.1. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Prima dimostrazione.

Supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p, q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente otteniamo: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ cioè

$$2q^2 = p^2$$

Pertanto p^2 e p sono numeri pari⁴. Posto allora $p = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) otteniamo:

$$2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

e dividendo per 2:

$$q^2 = 2m^2$$

Questa uguaglianza ci dice che q^2 è pari, da cui segue che anche q è pari.

⁴

Vale il seguente fatto:

(i) Se $x \in \mathbb{N}$ e x^2 è pari allora x è pari.

Si osservi che la stessa proprietà si può formulare in modo equivalente così:

(ii) Se $x \in \mathbb{N}$ e x è dispari allora x^2 è dispari.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Riassumendo, siamo giunti ad affermare che p e q sono entrambi pari, contro l'ipotesi che i due numeri siano primi fra loro. ■

Seconda dimostrazione.

Supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p, q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente otteniamo $\frac{p^2}{q^2} = 2$, cioè

$$p^2 = 2q^2 \quad (5.1)$$

Se $p = 1$ si ottiene immediatamente $1 = 2q^2$, che è assurdo. Se invece $p > 1$, per il *teorema fondamentale dell'aritmetica*⁵, il numero p si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) nel prodotto dei suoi numeri primi, cioè

$$p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} \quad (5.2)$$

Elevando al quadrato l'ultima uguaglianza e da (5.1) ricaviamo

$$p^2 = 2q^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2\alpha_n} \quad (5.3)$$

Quindi i numeri primi che costituiscono la fattorizzazione di p^2 e di $2q^2$ compaiono tutti un numero pari di volte. Ciò è assurdo perchè nella scomposizione di $2q^2$ il fattore primo 2 deve necessariamente comparire un numero *dispari* di volte. ■

⁵Il teorema fondamentale dell'aritmetica afferma che ogni numero intero maggiore di uno si scrive in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) come prodotto di numeri primi.

6 Area del cerchio. La dimostrazione di Archimede.

Archimede dimostra che l'area del cerchio è equivalente all'area del triangolo rettangolo avente per cateti la circonferenza e il raggio del cerchio.

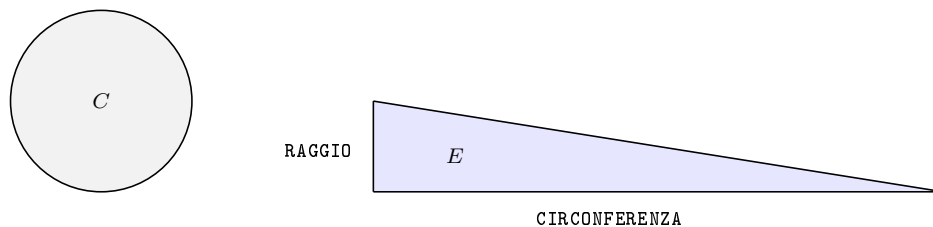


Figura 11

$$C = E$$

Qui ci limitiamo ad esporre le linee principali della dimostrazione di Archimede, la quale consiste di un'applicazione del *metodo di esaustione* generalmente attribuito a Eudosso di Cnido⁶. Il metodo consiste in una doppia *riduzione all'assurdo* per superare in modo rigoroso le difficoltà dovute all'impiego di grandezze infinitesimali e processi infiniti.

Il risultato che Archimede intende dimostrare costituisce l'esempio più importante di equivalenza di aree tra una figura dal contorno curvilineo e una dal contorno rettilineo, l'equivalenza appunto tra il cerchio e un ben determinato triangolo rettangolo.

Dimostrazione.

1. Supponiamo $C > E$.

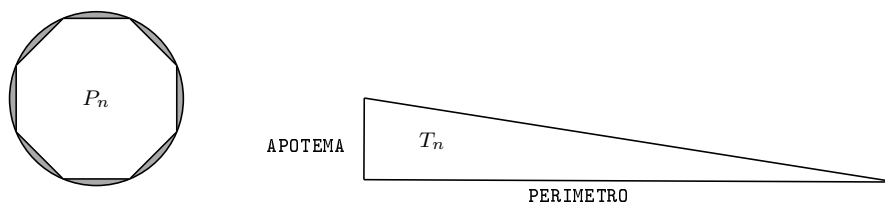


Figura 12

Inscriviamo nel cerchio un poligono regolare P_n la cui area è uguale a quella del triangolo T_n avente come base il perimetro del poligono e come altezza l'apotema, $P_n = T_n$. Per ogni n , abbiamo

$$P_n = T_n < E \quad (6.1)$$

perché la base di T_n , cioè il perimetro di P_n è minore della circonferenza e la sua altezza, cioè l'apotema, è minore del raggio.

⁶Eudosso (408-355 a.C.) matematico, astronomo e filosofo al quale si deve, tra l'altro, la fondamentale teoria delle proporzioni, esposta nel libro V degli *Elementi* di Euclide e importanti contributi al calcolo infinitesimale. Fu un frequentatore dell'*Accademia* di Platone.

A questo punto ricordiamo che abbiamo fatto l'ipotesi $C > E$. Allora per n sufficientemente grande, la differenza $C - P_n$ (la parte in grigio della figura 12) si può rendere piccola quanto si vuole; ciò significa che, per n sufficientemente grande, $C - P_n < C - E$. Ossia,

$$P_n > E \quad (6.2)$$

Riassumendo: dall'ipotesi $C > E$ abbiamo dedotto $P_n < E$ (uguaglianza 6.1) e $P_n > E$ (uguaglianza 6.2); quindi non può essere $C > E$.

2. Supponiamo $C < E$.

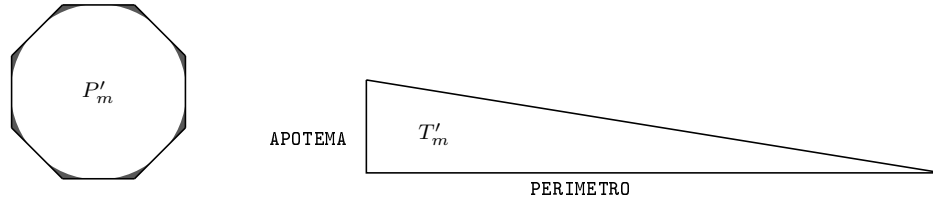


Figura 13

Circoscriviamo al cerchio un poligono regolare P'_m la cui area è uguale a quella del triangolo T'_m avente come base il perimetro del poligono e come altezza il raggio del cerchio, $P'_m = T'_m$. Per ogni m , abbiamo

$$P'_m = T'_m > E \quad (6.3)$$

perché la base di T'_m (cioè il perimetro di P'_m) è maggiore della base di E (cioè della circonferenza)⁷.

A questo punto ricordiamo che abbiamo fatto l'ipotesi $C < E$. Allora per m sufficientemente grande, la differenza $P'_m - C$ (la parte in grigio scuro della figura 13) si può rendere piccola quanto si vuole; ciò significa che, per m sufficientemente grande, $P'_m - C < E - C$. Ossia,

$$P'_m < E \quad (6.4)$$

Riassumendo: dall'ipotesi $C < E$ abbiamo dedotto $P'_m > E$ (uguaglianza 6.3) e $P'_m < E$ (uguaglianza 6.4); quindi non può essere $C < E$.

Q.E.D.

⁷Le altezze dei due triangoli T'_m ed E sono uguali

7 Sulla sfera e sul cilindro.

Sulla sfera e sul cilindro è il titolo di uno scritto di Archimede, nel quale il matematico greco dimostra che la superficie del cilindro circoscritto alla sfera è una volta e mezzo l'area della sfera

$$\frac{\text{Superficie Sfera}}{\text{Superficie Cilindro}} = \frac{2}{3}$$

Poiché Archimede aveva già dimostrato che l'area del cerchio misura πR^2 si ottiene immediatamente che la superficie laterale del cilindro circoscritto è pari alla superficie della sfera, la quale misura esattamente quattro volte la superficie di un suo cerchio massimo.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Laterale Cilindro} &= \text{Superficie Sfera} \\ &= 4 \times \text{Superficie Cerchio Massimo}\end{aligned}$$

La dimostrazione che qui presentiamo, si ispira a quella del grande matematico siracusano. Noi abbiamo seguito il procedimento proposto nel video

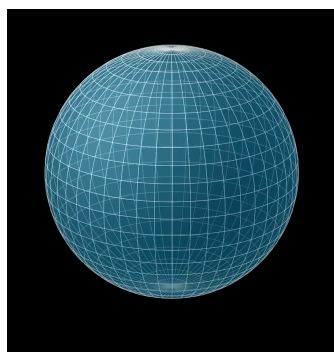
<https://www.3blue1brown.com/lessons/sphere-area>

Prima di proseguire la lettura di queste note consigliamo di guardare il video (almeno fino al minuto 11). Qui di seguito riportiamo i punti cruciali della dimostrazione, ognuno di essi è accompagnato da uno o più fermi immagine tratti dal video.

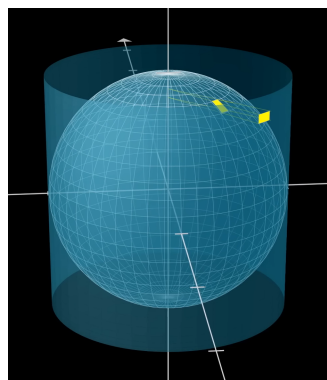
1. È data una sfera di raggio R .

Su di essa (figura 14a) scegliamo, in modo arbitrario, due punti antipodali che chiamiamo polo nord e polo sud. Ora, tracciamo una fitta rete di meridiani e paralleli in modo tale che l'intera superficie della sfera risulti suddivisa in tanti piccoli rettangoli⁸.

Circoscriviamo (figura 14b) alla sfera il cilindro avente per asse l'asse della sfera⁹; la superficie laterale del cilindro risulta essere tangente alla sfera lungo la linea dell'equatore.



(a)



(b)

Figura 14

⁸Si tratta di rettangoli perché ciascun di essi è un quadrilatero con esattamente quattro angoli retti.

⁹La retta passante per i due poli.

2. Descriviamo (figura 15) il procedimento che permette di “proiettare” ogni singolo rettangolo della sfera in un rettangolo sulla superficie laterale del cilindro in modo tale da *conservare le aree*, cioè in modo che *l’area di ogni rettangolo sulla sfera coincida esattamente con l’area della sua proiezione sul cilindro*.

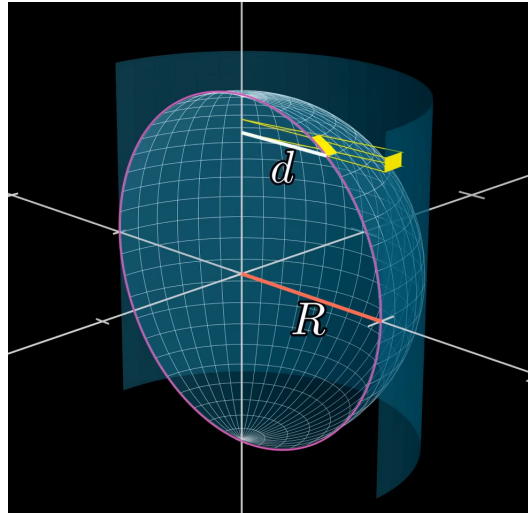


Figura 15

Per descrivere la proiezione, fissiamo l’attenzione sul quadrilatero di colore giallo sulla sfera e indichiamo con d la sua distanza dall’asse della sfera (l’asse verticale, in figura) Prolunghiamo il segmento di lunghezza d (quello evidenziato in bianco) quel tanto che basta perché esso intersechi il cilindro; in questo modo a un punto della sfera associamo un punto del cilindro. Se ripetiamo questa operazione per tutti i punti del rettangolo posto sulla sfera otteniamo sul cilindro un nuovo rettangolo: esso costituisce la proiezione che stavamo cercando.

È interessante notare che i lati del rettangolo sulla sfera costituiti da paralleli vengono trasformati nelle due basi ‘orizzontali’ del rettangolo sul cilindro e le lunghezze risultano dilatate. Invece, i lati del rettangolo sulla sfera costituiti da meridiani vengono trasformati nelle due altezze ‘verticali’ e le loro lunghezze risultano contratte. Il fatto notevole è che il fattore di contrazione dei lati posti sui meridiani è esattamente il reciproco del fattore di dilatazione dei lati posti sui paralleli. In altre parole se, per esempio, le basi si dilatano di un fattore 3 le altezze si contraggono del fattore $\frac{1}{3}$ e così via! Per questa ragione ogni rettangolo sulla sfera ha la stessa area del suo trasformato sul cilindro.

3. Mostriamo allora che quando la base del rettangolo viene dilatata del fattore k , l’altezza viene contratta secondo il fattore $\frac{1}{k}$.

Innanzitutto, i lati del quadrilatero posti sui paralleli vengono trasformati nei due lati longitudinali del rettangolo, figura 16a. Essi risultano *dilatati* rispetto ai corrispondenti lati del rettangolo sulla sfera in quanto sono più distanti dall’asse del cilindro¹⁰.

Il fattore di dilatazione è $\frac{R}{d}$ (ci possiamo convincere di questo fatto osservando la figura 16a. In essa compaiono due triangoli simili, quindi ...).

¹⁰L’asse z , l’asse verticale.

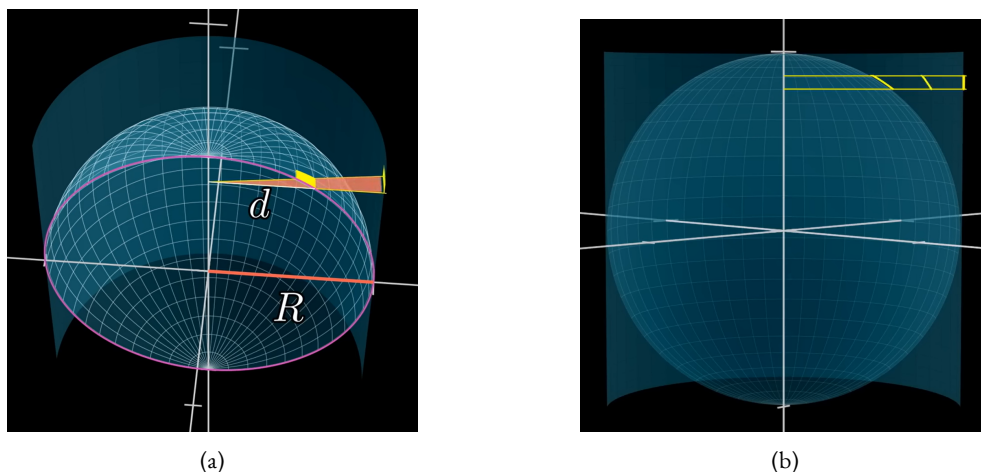


Figura 16

I due lati del quadrilatero posti sui meridiani vengono trasformati nei due lati “verticali” del rettangolo. Questa volta però, le distanze vengono contratte perché il lato del quadrilatero ha posizione inclinata rispetto alla verticale e la sua proiezione coincide con la sua “ombra” (che risulta più corta).

Ingrandendo in modo opportuno la figura 16b otteniamo la figura 17a dove è evidenziato il triangolo rettangolo di colore beige e poi, con un ulteriore ingrandimento, possiamo concentrarci sulla figura 17b in cui è stato evidenziato il triangolo rettangolo azzurro.

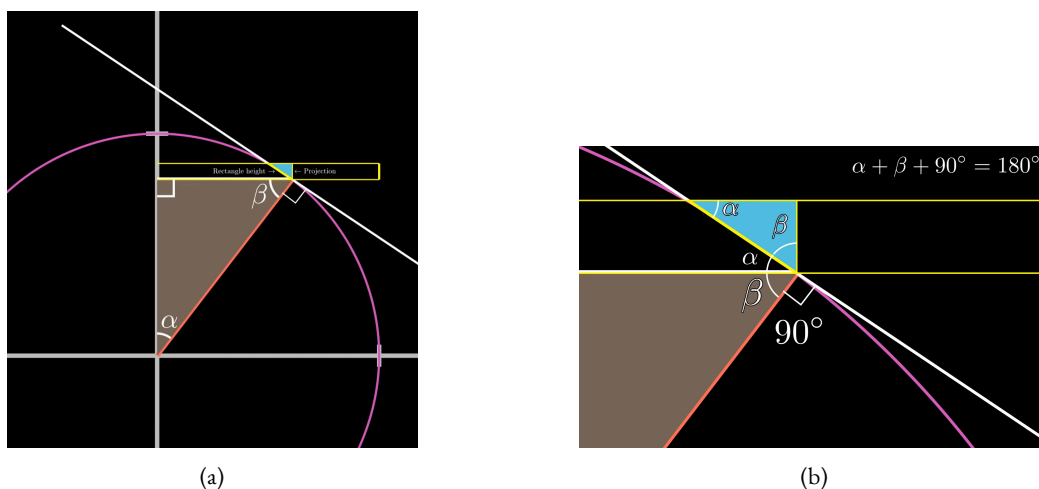


Figura 17

I due triangoli sono simili (perché?). Indicato con h e i nell'ordine, l'altezza e l'ipotenusa del triangolo azzurro otteniamo $h : i = d : R$, ossia

$$h = \frac{d}{R} i$$

cioè l'altezza h del triangolo azzurro risulta contratta del fattore $\frac{d}{R}$.

4. Riassumendo: se proiettiamo sul cilindro il piccolo rettangolo della sfera otteniamo un rettangolo la cui base è dilatata del fattore $\frac{R}{d}$ e la cui altezza è contratta del fattore $\frac{d}{R}$. Poiché il fattore di dilatazione delle basi è il reciproco del fattore di contrazione delle altezze, le aree dei due triangoli sono le stesse.

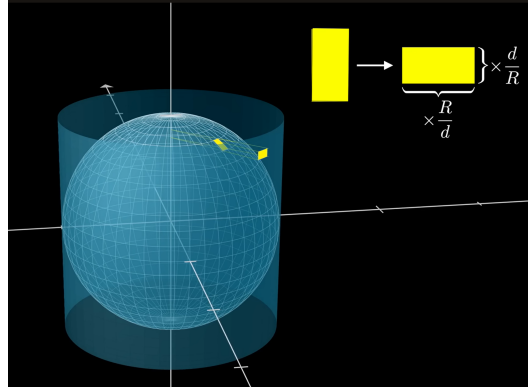


Figura 18

5. Concludiamo che l'area della sfera è uguale all'area laterale del cilindro, ossia

$$\begin{aligned}
 \text{Area della sfera} &= \text{Circonferenza cerchio massimo} \times \text{Diametro cerchio massimo} \\
 &= 2\pi R \times 2R
 \end{aligned}$$