IL METODO DELLE COORDINATE NEL PIANO

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Giugno 2019.

Indice

1 Il piano euclideo **2**

1.1 La rivoluzione cartesiana: fare geometria con l'algebra. 2

2 Il piano secondo Cartesio **5**

2.1 Somma di vettori. Moltiplicazione di un vettore per un numero. 5

2.2 Prodotto scalare 7

2.3 Vettori ortogonali, lunghezza, distanza 7

2.4 Proiezione di un vettore lungo un altro. 8

2.5 Angoli 10

2.6 Teorema di Pitagora 11

2.7 Equivalenza delle due definizioni di prodotto scalare 12

3 Rette nel piano **13**

3.1 Equazioni parametriche della retta 13

3.2 Retta per due punti 14

3.3 Rette parallele e rette ortogonali 14

3.4 Equazione cartesiana della retta 15

3.5 Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane (e viceversa): il caso di rette in $\mathbb{R}^2$ 16

3.6 Distanza di un punto da una retta 18

3.7 Fasci di rette 20

4 Esercizi **21**

[0] File tex: "metodo_delle_coordinate_2019.tex "

1 Il piano euclideo

Quando si studia la geometria euclidea prima si definiscono enti geometrici quali punti, segmenti, rette, poligoni, circonferenze, eccetera e poi si acquisiscono conoscenze su di essi mediante teoremi, cioè mediante proprietà che richiedono dimostrazioni rigorose. In questo contesto interessa solamente ricordare che lo "spazio" in cui collocare idealmente tutti gli oggetti geometrici fin qui incontrati è *il piano euclideo*: un piano formato da punti geometrici (un punto, per Euclide, è ciò che non ha parti). In questo piano ha senso, per esempio, parlare di distanza tra due punti e di angolo tra due rette, così come ha senso parlare di rette parallele e di rette ortogonali, di triangoli, di poligoni e così via.

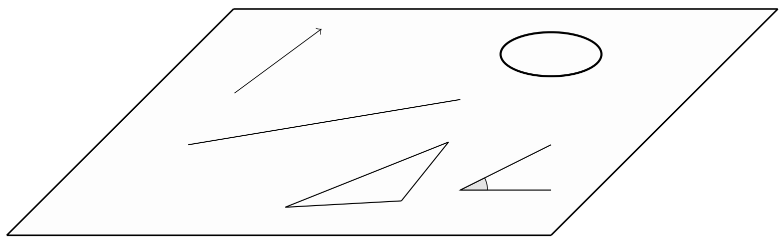

Figura 1: Punti, segmenti, rette, vettori, angoli, circonferenze, eccetera stanno nel piano euclideo.

Nel corso di fisica, invece, si sono introdotti i vettori: si è imparato a sommarli (con 'la regola del parallelogramma' o con il 'metodo punta coda') e a moltiplicare un vettore per un numero. Inoltre si è definito il *prodotto scalare* nel seguente modo

Definizione 1.1. *Il prodotto scalare di due vettori* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *è il numero (positivo, negativo, nullo) dato da*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\, |\mathbf{B}|\, \cos\vartheta$$

dove $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ *indicano le lunghezze di* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *e* ϑ *l'angolo compreso tra di essi*

Anche i vettori vanno idealmente collocati nel piano euclideo.

1.1 La rivoluzione cartesiana: fare geometria con l'algebra.

René Descartes (Cartesio (1596-1650)) è stato colui che ha avuto il merito di collegare il mondo della geometria con quello dell'algebra. L'essenza della sua idea si può concettualizzare nel seguente modo: sia π il piano della geometria euclidea (costituito da punti 'geometrici') e $\mathbb{R}^2$ l'isieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali, cioè

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

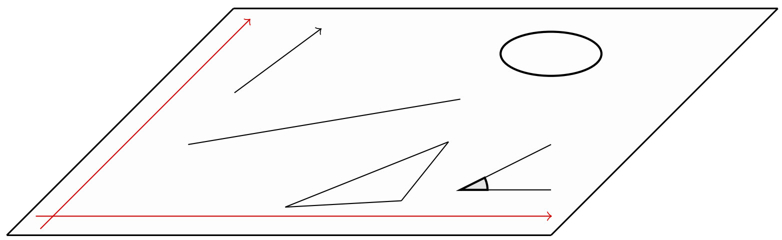

Figura 2: Il piano secondo Cartesio

L'idea su cui si fonda la geometria analitica consiste nell'identificare i *punti del piano* π con le *coppie ordinate di numeri reali.* Per fare questo occorre dapprima fissare un *sistema di riferimento* (ortogonale) in π, cioè occorre:

- fissare un punto $\mathbf{O}$ detto *origine* del sistema di riferimento;
- fissare una coppia di vettori $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ di lunghezza unitaria e tra loro ortogonali

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$$

Le due rette ortogonali, passanti per l'origine e dirette come $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ si chiamano assi coordinati (oppure, asse x, asse y; oppure asse delle *ascisse*, asse delle *ordinate*).

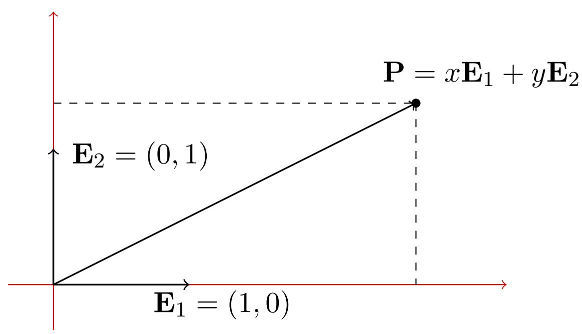

Figura 3: Sistema di riferimento cartesiano (ortogonale) nel piano.

Ogni punto $\mathbf{P}$ del piano si identifica con la coppia ordinata di numeri reali così definita

$$\mathbf{P} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 = (x, y)$$

In questo modo, si è stabilita una corrispondenza biunivoca

$$\pi \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che a ogni punto del piano associa una (e una sola) coppia (x, y) ordinata di numeri reali, e viceversa.

D'ora in poi se, ad esempio, si scrive $P = (2, 7)$ si intende indicare l'unico punto del piano che (nel sistema di riferimento prescelto) ha esattamente quelle coordinate.

Punti del piano e vettori spiccati dall'origine.

Fissato un sistema di riferimento xOy nel piano π, la coppia ordinata $P = (x, y)$ di numeri reali può essere interpretata geometricamente come *vettore spiccato dall'origine.* Quindi, a seconda delle necessità potremo pensare $\mathbb{R}^2$ come un insieme di *punti del piano ordinario*, oppure, come un insieme di *vettori spiccati dall'origine*; solo il contesto ci dirà qual è l'interpretazione migliore.

2 Il piano secondo Cartesio

2.1 Somma di vettori. Moltiplicazione di un vettore per un numero.

Si consideri l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate di numeri reali, ossia

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

Si ricordi che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ si possono identificare con vettori spiccati dall'origine.

Somma di vettori. Siano $\mathbf{P} = (p_1, p_2)$ e $\mathbf{Q} = (q_1, q_2)$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Si chiama *somma* di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ il vettore

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

Per esempio, se $\mathbf{P} = (1, 2)$ e $\mathbf{Q} = (3, 4)$ allora $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (1 + 3, 2 + 4)$. Osservando la figura qui sotto riportata è facile convincersi che il vettore $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ è lo stesso che si trova utilizzando la "regola del parallelogramma" introdotta in fisica.

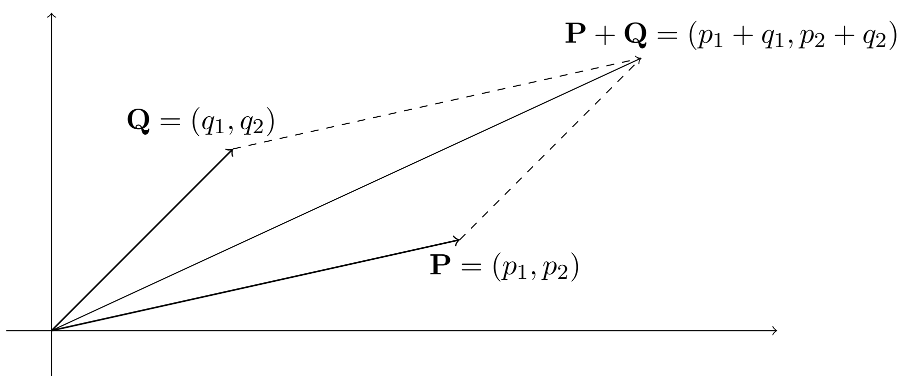

Figura 4: Il vettore $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ è lo stesso che si trova con la "regola del parallelogramma".

Per l'operazione *somma di vettori* appena definita in $\mathbb{R}^2$ valgono le seguenti proprietà (la verifica è lasciata per esercizio).

(a) La somma è *commutativa*: per ogni $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$$

(b) La somma è *associativa*: per ogni $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ in $\mathbb{R}^2$

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R})$$

(c) Esiste un vettore in $\mathbb{R}^2$, il vettore nullo $\mathbf{0}$, che è *elemento neutro* rispetto all'operazione di somma, nel senso che

$$\mathbf{P} + \mathbf{0} = \mathbf{P}$$

per ogni vettore $\mathbf{P}$.

(d) Per ogni vettore $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ esiste un vettore, l'*opposto* di $\mathbf{P}$, denotato $-\mathbf{P}$, che sommato a $\mathbf{P}$ dà il vettore nullo:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = \mathbf{0}.$$

Poichè valgono le proprietà qui sopra enunciate, si dice che $\mathbb{R}^2$, con l'operazione di somma, è un *gruppo abeliano*.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Sia $\mathbf{P} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ un vettore spiccato dall'origine e k un numero reale. Allora si chiama moltiplicazione del vettore $\mathbf{P}$ per il numero k il vettore

$$k\mathbf{P} = (kp_1, kp_2)$$

Per esempio, se $\mathbf{P} = (1, 2)$ e $k = 3$ allora $k\mathbf{P} = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2) = (3, 6)$. Moltiplicare il vettore $\mathbf{P}$ per il numero reale k significa dilatare (contrarre) il vettore $\mathbf{P}$ del fattore k.

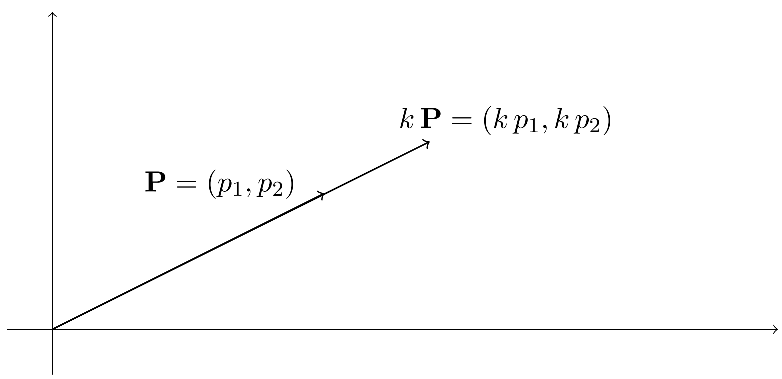

Figura 5: Il vettore $k\,\mathbf{P}$ è il vettore $\mathbf{P}$ dilatato del fattore k.

Per la *moltiplicazione di un vettore per un numero* valgono le seguenti proprietà

(e) $h(k\mathbf{P}) = (hk)\mathbf{P}$, per ogni $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$, per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.

(f) $(h + k)\mathbf{P} = h\mathbf{P} + k\mathbf{P}$, per ogni $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$, per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.

(g) $h(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = h\mathbf{P} + h\mathbf{Q}$, per ogni $\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(h) $1\mathbf{P} = \mathbf{P}$

Riassumendo, sono state introdotte in $\mathbb{R}^2$ due operazioni: la somma di vettori (spiccati dall'origine) per la quale valgono le proprietà (a),(b),(c),(d), e la moltiplicazione di un vettore per un numero reale per la quale valgono le proprietà (e),(f),(g),(h). Si può sintetizzare tutto ciò dicendo che $\mathbb{R}^2$ è uno *spazio vettoriale reale* rispetto alle due operazioni introdotte.

2.2 Prodotto scalare

Definizione 2.1. *Siano* $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ *e* $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ *due vettori di* $\mathbb{R}^2$. *Chiamiamo* prodotto scalare *di* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *il numero*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *si legge: "A scalare B")*

Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà (la cui verifica è lasciata per esercizio)

(a) *Bilinearità.* Per ogni fissato $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

$$k\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

(b) *Simmetria.* Per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(c) *Definita positività.* Per ogni $\mathbf{A} \neq 0$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} > 0$$

2.3 Vettori ortogonali, lunghezza, distanza

Definizione 2.2 (Vettori ortogonali)**.** *Per ogni* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$*, si dice che* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono* ortogonali *se*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Per esempio se $\mathbf{A} = (1, 2)$ e $\mathbf{B} = (3, 4)$ si ottiene $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11 \neq 0$; quindi i due vettori non sono ortogonali. Se invece $\mathbf{A} = (1, 2)$ e $\mathbf{B} = (-2, 1)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot -2 + 2 \cdot 1 = 0$; i due vettori sono ortogonali.

Infine si osservi che, in base alla definizione appena data, il vettore nullo $\mathbf{O} = (0, 0)$ risulta ortogonale a ogni vettore $\mathbf{A}$ di $\mathbb{R}^2$ perchè $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = 0$.

Dalla definizione di prodotto scalare si ricava subito che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = a_1^2 + a_2^2 = |\mathbf{A}|^2$. Questo fatto giustifica la seguente definizione

Definizione 2.3 (Lunghezza di un vettore)**.** *La* lunghezza *di un vettore* $\mathbf{A}$ *di* $\mathbb{R}^2$ *è il numero reale*

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

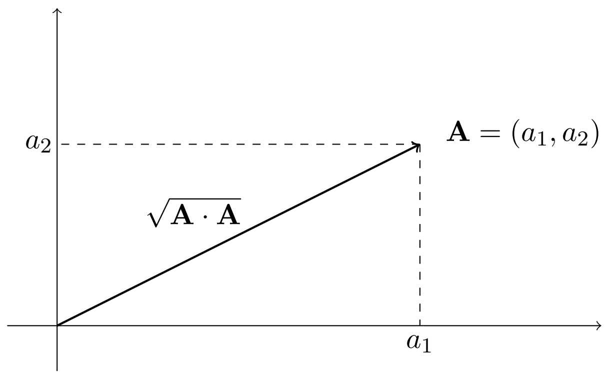

Figura 6: La lunghezza del vettore A è $\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Un vettore $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ si dice *unitario* se $|\mathbf{U}| = 1$.

Definizione 2.4 (Distanza tra due punti)**.** *La distanza* $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *fra due punti* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$ *è il numero*

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

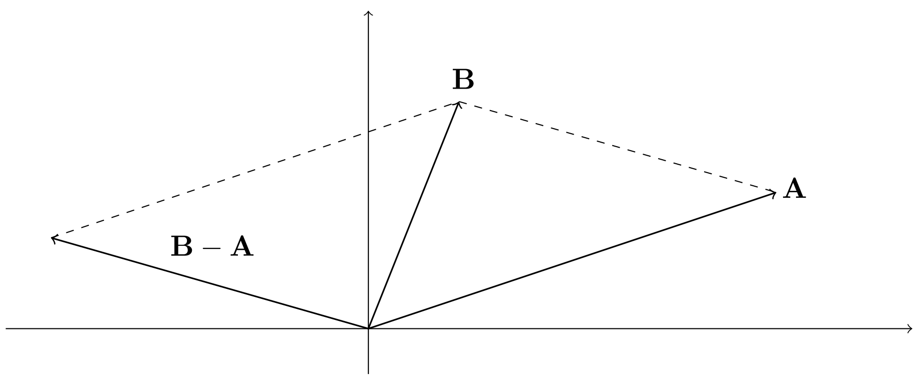

Figura 7: La distanza di $\mathbf{A}$ da $\mathbf{B}$ è la lunghezza del vettore $\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

2.4 Proiezione di un vettore lungo un altro.

Teorema 2.5 (Proiezione di un vettore lungo un altro)**.** *Sia* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{B} \neq 0$. *Ogni vettore* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$, *si scrive in modo unico come*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp} \tag{2.1}$$

con $\mathbf{A}_{\parallel}$ *parallelo a* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{A}_{\perp}$ *ortogonale a* $\mathbf{B}$*.*

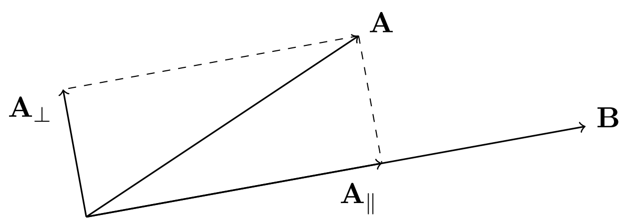

Figura 8: Il vettore $\mathbf{A}_\parallel$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{A}$ lungo $\mathbf{B}$.

Si ha:

$$\mathbf{A}_\parallel = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\,\mathbf{B} \tag{2.2}$$

e, di conseguenza,

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\,\mathbf{B} \tag{2.3}$$

Dimostrazione.

La dimostrazione consiste nel trovare un vettore $\mathbf{A}_\parallel$ che sia parallelo a $\mathbf{B}$ e tale che la differenza $\mathbf{A}-\mathbf{A}_\parallel$ sia ortogonale a $\mathbf{B}$. In altri termini, un vettore $\mathbf{A}_\parallel$ che sia parallelo a $\mathbf{B}$ è un vettore multiplo di $\mathbf{B}$, cioè del tipo $t\mathbf{B}$ ($t \in \mathbb{R}$); tale vettore ha la proprietà che $\mathbf{A} - t\mathbf{B}$ è ortogonale a $\mathbf{B}$ se e solo se

$$(\mathbf{A} - t\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} = 0$$

ossia

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - t(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = 0$$

L'ultima uguaglianza è un equazione di primo grado in t nella quale $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \neq 0$ perchè, per ipotesi, $\mathbf{B} \neq 0$. L'unica soluzione di questa equazione è

$$t = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}$$

Quindi,

$$\mathbf{A}_\parallel = t\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\,\mathbf{B}$$

e, per differenza,

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_\parallel = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\,\mathbf{B}$$

■

Quindi per ogni $\mathbf{A}$ in $\mathbb{R}^2$ e per ogni $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, il teorema appena dimostrato permette di calcolare con un semplice conto la proiezione ortogonale di $\mathbf{A}$ su $\mathbf{B}$, si scrive $P_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})$:

$$P_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\, \mathbf{B} \tag{2.4}$$

Esempio. Se $\mathbf{A} = (0, 1)$ e $\mathbf{B} = (1, 1)$, la proiezione ortogonale di $\mathbf{A}$ sul vettore $\mathbf{B}$ è

$$P_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\, \mathbf{B} = \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Osservazione 1.

Se al posto di $\mathbf{B}$ si sostituisce un suo qualunque multiplo (non nullo) $k\,\mathbf{B}$ ($k \in \mathbb{R}$), la proiezione $P_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})$ non cambia. Infatti,

$$\frac{\mathbf{A} \cdot k\,\mathbf{B}}{k\,\mathbf{B} \cdot k\,\mathbf{B}}\, k\,\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}\, \mathbf{B}$$

Dunque, si può pensare la proiezione $P_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})$ come la proiezione di $\mathbf{A}$ lungo la *retta orientata* del vettore $\mathbf{B}$.

Osservazione 2.

Per un vettore $\mathbf{U}$ unitario ($\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 1$), la proiezione di $\mathbf{A}$ lungo $\mathbf{U}$ assume la seguente forma (più semplice):

$$P_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})\, \mathbf{U} \tag{2.5}$$

2.5 Angoli

Sia $\mathbf{U}$ un vettore unitario. Ricordando che la proiezione di $\mathbf{A}$ lungo $\mathbf{U}$ (la componente di $\mathbf{A}$ lungo $\mathbf{U}$ è il prodotto della lunghezza di $\mathbf{A}$ per il coseno ϑ dell'angolo compreso tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{U}$ si ottiene:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})\, \mathbf{U} = (|\mathbf{A}| \cos\vartheta)\, \mathbf{U}$$

ossia

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}}{|\mathbf{A}|}$$

Esempio. Trovare il coseno dell'angolo α formato dai vettori $\mathbf{A} = (2, 0)$ e $\mathbf{B} = (1, 1)$.

Soluzione. Il vettore unitario parallelo a $\mathbf{B}$ e orientato come $\mathbf{B}$ è $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2.6 Teorema di Pitagora

Teorema 2.6 ("Teorema di Pitagora")**.** *Siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *vettori di* $\mathbb{R}^2$. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono ortogonali, allora*

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2 &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + 2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \\
&= |\mathbf{A}|^2 + 2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + |\mathbf{B}|^2 \\
&= |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \qquad \text{(perchè } \mathbf{A},\mathbf{B} \text{ sono ortogonali per ipotesi, cioè } \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0\text{)}
\end{aligned}$$

■

2.7 Equivalenza delle due definizioni di prodotto scalare

In questa sezione si mostra che la definizione di prodotto scalare in termini di componenti, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, è equivalente a quella introdotta nel corso di fisica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\vartheta$, (dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori).

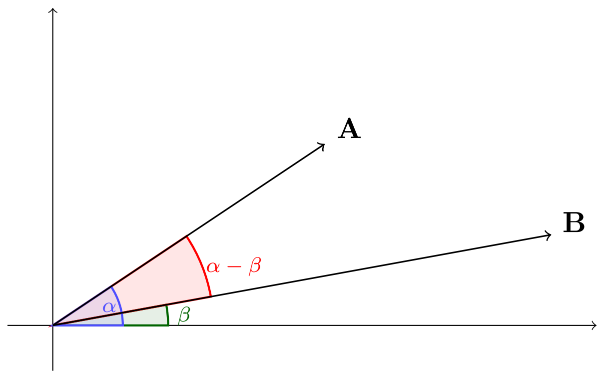

Figura 9:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\
&= (|\mathbf{A}| \cos\alpha)\ (|\mathbf{B}| \cos\beta) + (|\mathbf{A}| \sin\alpha)\ (|\mathbf{B}| \sin\beta) \\
&= (|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\alpha\ \cos\beta) + (|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \sin\alpha\ \sin\beta) \\
&= |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| (\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta) \\
&= |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos(\alpha - \beta) \\
&= |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\vartheta
\end{aligned}
$$

■

3 Rette nel piano

3.1 Equazioni parametriche della retta

Si osservi la seguente figura:

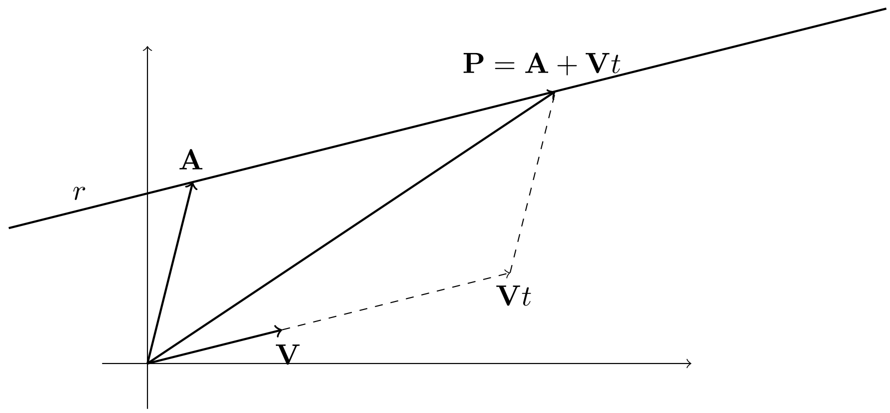

Figura 10:

L'equazione parametrica (vettoriale) della retta r passante per $\mathbf{A}$ e parallela al vettore non nullo $\mathbf{V}$ è

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{V}t \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Il vettore $\mathbf{V}$ si chiama *vettore di direzione* della retta.

L'equazione (3.1) si può scrivere in termini di coordinate; se $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{V} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{P} = (x, y)$ si ottiene

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2}$$

[1]

[1] L'*equazione parametrica* di una retta nel piano $\mathbb{R}^2$ è una funzione

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \\ &t \longmapsto (a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t) \end{aligned}$$

In linea di principio, è bene distinguere la *funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2$ dalla sua *immagine*, cioè dall'insieme dei punti $r(t) = \mathbf{A} + \mathbf{V}t$ nel piano, ottenuti al variare del parametro t in $\mathbb{R}$. Distinguere i due concetti è importante, ad esempio, in cinematica: la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2$ è (la legge oraria di) un moto rettilineo uniforme, di velocità vettoriale V, passante per A all'istante $t = 0$; invece la sua immagine

$$\text{Im }(r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = A + Vt,\, t \in \mathbb{R}\ \}$$

è la traiettoria (o orbita) del moto. Naturalmente, una stessa traiettoria può essere percorsa in infiniti modo diversi. In termini geometrici: una retta, intesa come insieme di punti dello spazio, può essere parametrizzata in infiniti modi diversi.

Esempi

1) Equazioni parametriche per la retta passante per $P_0 = (3, 5)$ e con vettore di direzione $V = (1, 2,)$ sono:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) Equazioni parametriche per l'asse delle x sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3.2 Retta per due punti

L'equazione parametrica, in forma vettoriale, per la retta che passa per i due punti (distinti) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è :

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} - \mathbf{A})t, \quad t \in \mathbb{R}$$

In componenti, se $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$, equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(Spiegare facendo una figura).

3.3 Rette parallele e rette ortogonali

Rette parallele. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r' : \begin{cases} x = a'_1 + v'_1 u \\ y = a'_2 + v'_2 u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R} \qquad (3.3)$$

sono parallele se e solo se i loro vettori di direzione (v_1, v_2) e (v'_1, v'_2) sono proporzionali, cioè se esiste un numero reale k per il quale

$$v'_1 = kv_1, \qquad v'_2 = kv_2$$

Rette ortogonali. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r' : \begin{cases} x = a'_1 + v'_1 u \\ y = a'_2 + v'_2 u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R} \qquad (3.4)$$

sono ortogonali se e solo se i loro vettori di direzione (v_1, v_2) e (v'_1, v'_2) sono ortogonali, cioè se e solo se

$$v_1\, v'_1 + v_2\, v'_2 = 0$$

3.4 Equazione cartesiana della retta

Sia $\mathbf{N} = (a, b)$ un qualunque vettore non nullo ortogonale alla retta r e sia $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ un punto (qualunque) appartenente alla retta.

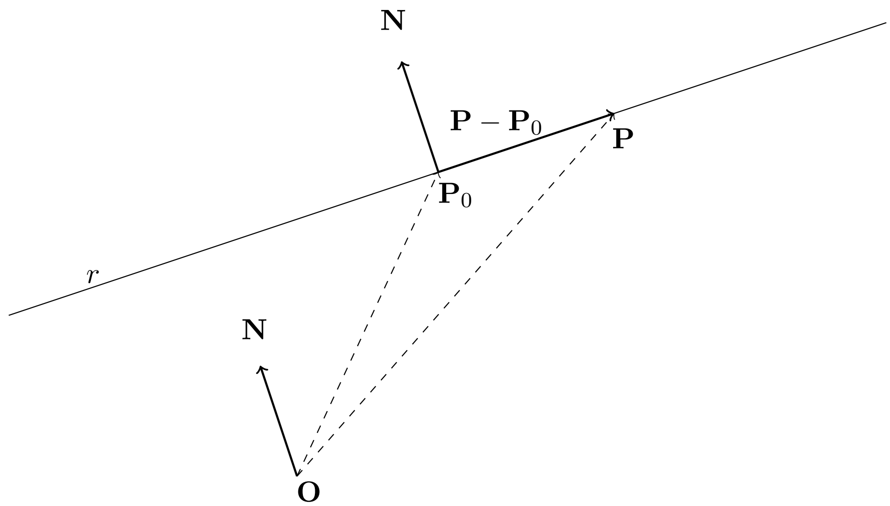

Figura 11:

Un punto $\mathbf{P} = (x, y)$ appartiene alla retta se, e solo se, il vettore $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ è ortogonale a $\mathbf{N}$. Quindi l'equazione della retta, in forma vettoriale, è

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0 \tag{3.5}$$

In coordinate cartesiane ortogonali, l'equazione vettoriale (3.5) della retta r si scrive

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{3.6}$$

Posto $c = -ax_0 - by_0$ e con facili calcoli si ottiene:

$$ax + by + c = 0 \tag{3.7}$$

Riassumendo: ogni retta r è rappresentata da un'equazione di primo grado in x, y,

$$ax + by + c = 0 \tag{3.8}$$

dove almeno uno dei due coefficienti a, b è diverso da zero. La (3.8) si chiama *equazione cartesiana della retta*. Il vettore non nullo $\mathbf{V} = (a, b)$ ha una interpretazione geometrica: è un vettore ortogonale alla retta r.

Viceversa, sia

$$ax + by + c = 0 \tag{3.9}$$

una qualunque equazione di primo grado in x, y con almeno uno dei due coefficienti a, b non nullo. Bisogna dimostrare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (3.9), cioè l'insieme dei punti $\mathbf{P} = (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano (3.9), è una retta nel piano. Infatti, sia $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ un punto (qualunque) del piano le cui coordinate soddisfino l'equazione (3.9):

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \tag{3.10}$$

(Un tale punto (x_0, y_0) esiste sicuramente. Ad esempio, se $b \neq 0$, basta dare a x un valore arbitrario x_0 e poi ricavare il valore y_0: si ottiene $y_0 = \frac{-ax_0-c}{b}$). Da questa uguaglianza si ricava $c = -ax_0 - by_0$. Sostituendo questo valore di c in (3.9), si ricava:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c = 0 \tag{3.11}$$

oppure, in forma vettoriale,

$$V \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0 \tag{3.12}$$

dove $\mathbf{V} = (a, b)$ e $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = (x - x_0, y - y_0)$. Quest'ultima equazione (3.12) ha un evidente significato geometrico: rappresenta il luogo dei punti $\mathbf{P}$ del piano per i quali il vettore $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ è ortogonale al fissato vettore $\mathbf{V}$. Dunque, anche l'equazione (3.9), equivalente a (3.12), rappresenta una retta: precisamente la retta passante per $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{V} = (a, b)$.

3.5 Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane (e viceversa): il caso di rette in $\mathbb{R}^2$

Spesso è utile saper passare dalle equazioni parametriche di una retta a una sua equazione cartesiana e vicersa.

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane.

Se si conoscono le equazioni parametriche della retta r

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

si può sempre ricavare t da almeno una delle due equazioni; per esempio, se $a \neq 0$ dalla prima equazione si ottiene:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \tag{3.13}$$

e sostituendo il valore trovato di t nella seconda equazione si trova

$$y = y_0 + b\,\frac{x - x_0}{a} \tag{3.14}$$

che rappresenta una equazione cartesiana di r.

Da equazioni cartesiane a equazioni parametriche

Se si conosce una equazione cartesiana della retta r

$$ax + by + c = 0 \tag{3.15}$$

almeno uno dei due coefficienti a, b è diverso da zero. Se, per esempio $a \neq 0$, si sostituisce $y = t$ nell'equazione (3.16)

$$ax + bt + c = 0 \tag{3.16}$$

Quindi, equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}t \\ y = t \end{cases}$$

Esempio.

Trovare un'equazione cartesiana per la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

Soluzione.

Dalla seconda equazione si ricava $t = y - 2$ e sostituendo nella prima: $x = 1 - 3(y - 2)$, $x + 3y - 7 = 0$.

Esempio.

Trovare equazioni parametriche per la retta r di equazione cartesiana:

$$2x - 7y + 1 = 0$$

Soluzione. Dall'equazione cartesiana, posto $y = t$ si ottiene:

$$\begin{cases} 2x - 7t + 1 = 0 \\ y = t \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

che fornisce equazioni parametriche della retta r.

3.6 Distanza di un punto da una retta

La distanza di $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ dalla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La distanza di $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ dalla retta r di equazione $y = mx + q$ è

$$d = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Prima dimostrazione.

Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$ e $R = (x_1, y_1)$ un punto qualsiasi di tale retta. Un vettore unitario ortogonale a r è $\mathbf{N} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

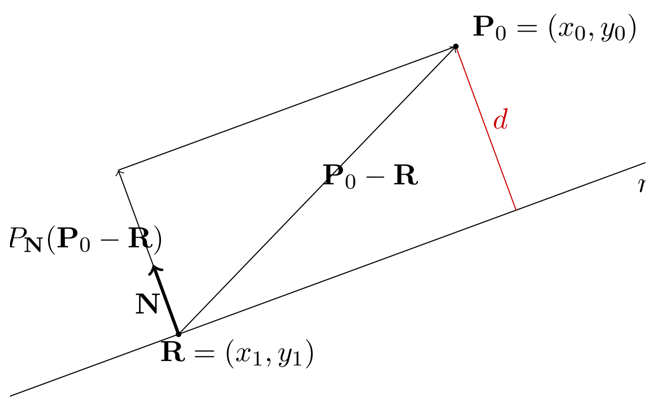

Figura 12: La distanza di $\mathbf{P}_0$ da r coincide con la lunghezza del vettore $P_{\mathbf{N}}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R})$ (proiezione di $\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}$ lungo $\mathbf{N}$).

Si osservi la figura 12: la proiezione $P_{\mathbf{N}}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R})$ di $\mathbf{P}_0 - \mathbf{R}$ lungo $\mathbf{N}$ coincide con la distanza cercata. Si ha

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathbf{N}}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R})\| &= |(P_0 - R) \cdot \mathbf{N}| \\
&= \left|(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| \\
&= \left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|
\end{aligned}$$

Infine, osservando che $ax_1 + by_1 + c = 0$ ($\mathbf{R} = (x_1, y_1)$ sta sulla retta r) si ottiene

$$d = \|P_{\mathbf{N}}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{R})\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Seconda dimostrazione

Si osservi la figura 13.

I due triangoli grigi sono simili (perchè?). Dalla proporzione

$$1 : \sqrt{m^2+1} = d : |mx_0 + q - y_0|$$

si ricava

$$d = \frac{|mx_0 + q - y_0|}{\sqrt{m^2+1}}$$

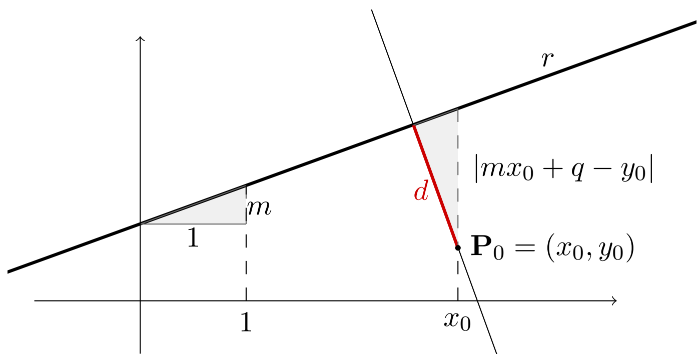

Figura 13:

3.7 Fasci di rette

Siano r e r' due rette distinte del piano di equazione, nell'ordine, $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$. L'equazione del fascio di rette aventi per generatrici r e r' è

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{3.17}$$

dove λ , $\mu \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia (λ, μ) l'uguaglianza (3.17) individua una retta di equazione

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + \lambda c + \mu c' = 0$$

Se le rette generatrici r, r' sono incidenti e T è il punto di intersezione allora le rette del fascio (3.17) sono tutte e sole le rette passanti per T mentre se r, r' sono parallele (e distinte) le rette del fascio sono tutte e sole le rette parallele a r (r').

È possibile descrivere il fascio di rette utilizzando un solo parametro anzichè due. Infatti, dividendo l'equazione (3.17) per $\lambda \neq 0$ si ottiene

$$(ax + by + c) + \frac{\mu}{\lambda}(a'x + b'y + c') = 0$$

ovvero

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \tag{3.18}$$

dove $k = \frac{\mu}{\lambda}$. Si tenga presente che in questo caso NON esiste alcun valore di k che permetta di determinare la retta r'. In altre parole, l'equazione (3.18) fornisce, per ogni $k \in \mathbb{R}$, una retta del fascio meno una: la retta r'.

Esempi

1. L'equazione del fascio di rette di centro (sostegno) $P_0 = (x_0, y_0)$ si scrive spesso nel seguente modo

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2. (Fascio di rette parallele a una retta data.) Se la retta r ha equazione $y = 2x - 3$ allora il fascio di rette parallele a r ha equazione

$$y = 2x + q$$

4 Esercizi

Esercizio 4.1. ***Vero o Falso?*** Motivare le risposte per iscritto, sul quaderno.

1. $\boxed{V|F}$ *Se* $A = (-\frac{2}{3}, 1)$ *e Se* $B = (+\frac{5}{3}, 2)$ *allora* $A + B = (\frac{7}{3}, 3)$

2. $\boxed{V|F}$ *Se* $A = (\frac{5}{2}, 0)$ *e Se* $B = (-\frac{2}{3}, 1)$ *allora* $2A + 3B = (3, 3)$

3. $\boxed{V|F}$ *I vettori* $A = (2, 5)$ *e* $B = (6, 15)$ *sono paralleli.*

4. $\boxed{V|F}$ *Se* $A = (2, -3)$ *e* $B = (-4, 5)$ *allora* $A \cdot B = -23$. *(*$A \cdot B$ *= prodotto scalare di* A *e* B*).*

5. $\boxed{V|F}$ *I vettori* $A = (-3, 2)$ *e* $B = (4, 6)$ *sono ortogonali.*

6. $\boxed{V|F}$ *La lunghezza del vettore* $A = (3, 4)$ *è* $\|A\| = 5$.

7. $\boxed{V|F}$ *Siano* $A = (-1, 3)$ *è* $B = (+2, -2)$. *La distanza* $d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{33}$.

8. $\boxed{V|F}$ *Il punto* $P = (-1, 2)$ *appartiene alla retta* r *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

9. $\boxed{V|F}$ *Le rette* r *e* s *rispettivamente di equazioni parametriche*

$$r: \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{4}t \\ y = 3 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 2 - 3u \\ y = -1 + 2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

sono parallele.

10. $\boxed{V|F}$ *Le rette* r *e* s *rispettivamente di equazioni parametriche*

$$r: \begin{cases} x = -\frac{1}{3}t \\ y = 2 + 10t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 2 - 6u \\ y = -1 - \frac{1}{5}u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

sono ortogonali.

Esercizio 4.2. *Siano* $X = (x_1, x_2)$ *e* $Y = (y_1, y_2)$ *due vettori di* $\mathbb{R}^2$. *Scrivere:*

a) *il prodotto scalare* $X \cdot Y$*;*

b) *la norma di* X *e il coseno dell'angolo tra* X *e* Y *(supponendo* $X, Y \neq 0$*);*

c) *l'espressione della distanza di* X *da* Y.

Esercizio 4.3. *Quando due vettori* $X = (x_1, x_2)$ *e* $Y = (y_1, y_2)$ *di* $\mathbb{R}^2$ *di dicono ortogonali? Stabilire per quali eventuali valori di* $h \in \mathbb{R}$ *i vettori* $(2 - h, 1)$ *e* $(-1, 1 + h)$ *sono ortogonali.*

Esercizio 4.4. *Scrivere tutti i vettori che sono multipli del vettore* $(1, 1)$ *e che hanno lunghezza 1.*

Esercizio 4.5. *Trovare le equazioni parametriche per la retta* r *che contiene i punti* $A = (1, 0)$ *e* $B = (2, -4)$.

Esercizio 4.6. *Si considerino i punti* $A = (1, 4)$ *e* $B = (\frac{2}{3}, -2)$. *Scrivere le equazioni parametriche dell'asse del segmento* AB.

Esercizio 4.7. *Le rette* r *e* s *di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 2 - 2u \\ y = 3 - \frac{1}{2}u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

sono incidenti? In caso affermativo, trovare le coordinate del punto di intersezione.

Esercizio 4.8. *Trovare i punti di intersezione della retta* r *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

con gli assi cartesiani.

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane (e viceversa): il caso di rette in $\mathbb{R}^2$

Esercizio 4.9. *Trovare un'equazione cartesiana per la retta di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

Esercizio 4.10. *Trovare equazioni parametriche per la retta* r *di equazione cartesiana:*

$$2x - 7y + 1 = 0$$