Gravitazione.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, aprile 2020.

Indice

Per approfondimenti sull'argomento "Gravitazione" si consigliano i seguenti testi:

Richard Feynman, *Sei pezzi facili*, Adelphi, 2000 (undicesima edizione, settembre 2009).

George Gamow, *Gravità . Le forze che governano l'universo.* Edizioni Dedalo 2010.

[0]Nome file: 'gravitazione_universale_2020.tex'

1 Il sistema solare e il modello eliocentrico

1.1 Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.). Copernico (1473 - 1543).

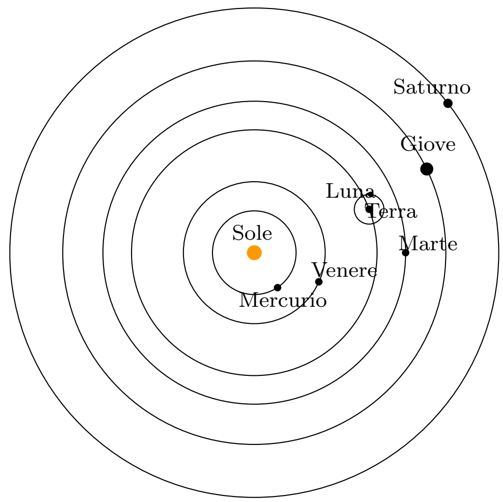

Figura 1: Il sistema eliocentrico di Aristarco e di Copernico.

I sette "pianeti classici" sono: Mercurio, Venere (i più vicini al sole), Terra, Luna e infine Marte, Giove e Saturno (i più lontani dal sole). I "pianeti nuovi" sono tre: Urano Plutone e Nettuno. Urano, fu prima classificato fra le stelle fisse e nel 1781 fu identificato come pianeta da William Herschel. La sua orbita fu calcolata da Bouvard nel 1821; nel 1845 si notò che l'orbita effettiva del pianeta si discostava fortemente da quanto era stato previsto con calcoli teorici; Adams e Le Verrier attribuirono questo scostamento agli effetti perturbativi dovuti alla presenza di un altro pianeta. La sera del 23 settembre 1846, presso l'Osservatorio astronomico di Berlino, gli astronomi Johann Gottfried Galle e il suo assistente Heinrich Louis d'Arrest osservarono per la prima volta il pianeta Nettuno. Esso fu il primo pianeta ad essere individuato mediante analisi teoriche e non attraverso regolari osservazioni. Plutone invece fu osservato, in modo casuale, il 18 febbraio 1930.

1.2 Leggi di Keplero

Keplero, basandosi sulle osservazioni astronomiche di Tycho Brahe formulò tre leggi di natura puramente cinematica sui moti planetari.

Prima legge di Keplero. *Un pianeta orbita attorno al sole descrivendo un'orbita ellittica di cui il sole occupa uno dei due fuochi.*

Le orbite planetarie non sono circolari, come sosteneva Copernico, bensì ellittiche.

L'ellisse è il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi. Tale somma è uguale all'asse maggiore dell'ellisse. Il rapporto tra la semidistanza dei due fuochi e il semiasse maggiore definisce l'eccentricità e dell'ellisse

$$e = \frac{c}{a}$$

dove c è la semidistanza focale e a è la lunghezza del semiasse maggiore. L'eccentricità dell'ellisse è un numero compreso tra zero e uno: $0 \leq e < 1$. Nel sistema solare i pianeti che descrivono orbite molto 'schiacciate' sono Plutone (il più lontano dal Sole, $e = 0,248$) e Mercurio (il più vicino al Sole, $e = 0,206$). Per gli altri pianeti il valore dell'eccentricità è prossimo a zero; per esempio quello della Terra è $e = 0,0167$; ciò permette di identificare, con buona approssimazione, la sua orbita con quella della circonferenza.

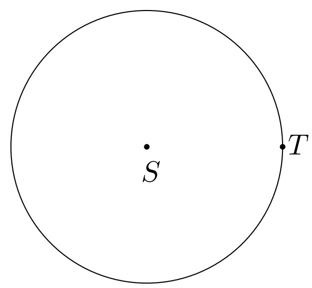

Figura 2: L'orbita terrestre è un'ellisse con la stessa eccentricità di quella riportata in figura.

Seconda legge di Keplero. *Un pianeta, nel suo moto di rivoluzione attorno al sole, spazza aree uguali in tempi uguali.*

La velocità con cui il pianeta orbita attorno al sole non è costante. Dalla prima legge di Keplero si deduce immediatamente che il pianeta, durante la sua orbita, viene a trovarsi a distanze diverse dal Sole: esso passa dal *perielio* (punto più vicino al sole) all'*afelio* (punto più lontano dal sole). Il raggio che idealmente congiunge il pianeta con il sole descrive in tempi uguali triangoli curvilinei di uguale superficie, ma con archi di base sull'orbita (e altezze) di diversa lunghezza. Ne segue che, il pianeta si muove più velocemente quando si trova in prossimità del perielio rispetto a quando si trova in prossimità dell'afelio. La velocità del pianeta è massima al perielio, minima all'afelio.

Un modo equivalente e più conciso per enunciare questa legge consiste nell'affermare che *i pianeti mantengono costante la velocità areolare* (`velocità areolare = area/tempo = costante`).

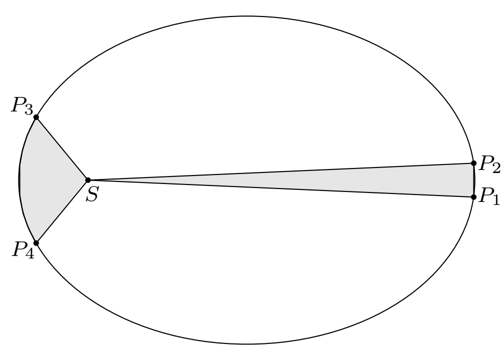

Figura 3: La velocità areolare di un pianeta è costante.

Terza legge di Keplero. *Se T indica il periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole e r è la distanza media del pianeta dal sole. Allora il quadrato del tempo di rivoluzione è proporzionale al cubo della sua distanza media dal sole, cioè*

$$T^2 = hr^3$$

dove h è costante.

2 Legge di gravitazione universale. Newton (1642-1727)

2.1 Un primo passo: la mela, la luna e ... la palla di cannone

Si dice che Newton pensò per la prima volta alla legge di gravitazione universale osservando una mela che cadeva da un albero. Ovviamente è difficile stabilire se questo anedotto corrisponda al vero; quel che è certo è che Newton elaborò la sua teoria della gravitazione nel 1665 (aveva 23 anni) e in quell'anno si dovette trasferire in una fattoria del Lincolnshire per sfuggire alla Grande Peste che si era abbattuta su Londra e che causò la chiusura dell'Università di Cambridge. Non è difficile immaginare che in campagna abbia visto cadere molte mele ...

Newton scriveva: "... quello stesso anno cominciai a pensare agli effetti della gravità sulla Luna, paragonando la forza necessaria a mantenere la Luna sulla sua orbita con la forza di gravità presente sulla superficie terrestre".

Newton si convinse che la luna è , per certi versi, assimilabile a una grossa mela e di conseguenza si chiese quale doveva essere la relazione esistente tra il moto rettilineo uniformemente accelerato di un corpo che cade in prossimità della superficie terrestre e il moto orbitale della luna. La domanda che (forse) si pose è

Qual è il nesso tra il moto della mela e quello della luna?

Più precisamente, Luna e mela sono entrambe soggette alla forza di gravità terrestre. Perchè allora l'accelerazione di gravità $\mathbf{g}$, scoperta e ben descritta da Galileo, dovrebbe far muovere la mela di moto rettilineo uniformemente accelerato e allo stesso tempo costringere la luna a descrivere un'orbita ellittica attorno alla Terra? In ultima analisi

Perchè la luna non cade sulla terra?

Per cercare di capire come Newton rispose a queste domande bisogna anzi tutto ricordare che egli, come tutti gli altri fisici del suo tempo, conosceva benissimo le leggi cinematiche del moto uniforme e quelle del moto uniformemente accelerato. Sapeva inoltre che un oggetto, lanciato in prossimità della superficie terrestre con velocità iniziale assegnata, descrive una traiettoria parabolica. Più scarse erano invece le sue conoscenze sulla luna: sapeva che era all'incirca sferica e presumibilmente piena, poco altro.

La grande intuizione di Newton fu capire che il nesso tra la mela e la Luna è da ricercarsi ... nella palla di cannone!

Egli interpretò il moto di caduta di una mela dall'albero come quello di una piccola palla di cannone sparata con velocità orizzontale nulla; in altre parole pensò alla traiettoria descritta da un corpo in caduta libera come al caso limite di un moto parabolico.

E la luna? Si può pensare alla luna come a un'enorme palla di cannone? Sì, purchè si immagini che sia stata sparata con grandissima velocità orizzontale.

Per capire meglio la questione Newton immaginò il seguente "esperimento di pensiero": dalla cima di una montagna molto alta si immagini di sparare una palla di cannone con velocità iniziale elevatissima e direzione parallela al piano di terra. Il moto della palla di cannone consiste di due moti indipendenti: il primo è un moto rettilineo uniforme diretto come il piano di terra mentre il secondo è un moto rettilineo uniformemente accelerato, la cui accelerazione è $\mathbf{g}$; la composizione dei due moti fa sì che la palla di cannone descriva una traiettoria parabolica. Se la terra fosse piatta la palla di cannone toccherebbe il suolo in un punto che risulterebbe tanto più lontano quanto più è elevata la velocità iniziale con cui viene sparata la palla. Ma la terra è approssimativamente una sfera: se la palla di cannone venisse sparata con velocità orizzontale molto grande essa vedrebbe la superficie terrestre incurvarsi sotto di sé. Raggiunta una certa velocità limite (e trascurando l'effetto della resistenza dell'aria) la palla di cannone descriverebbe un'orbita curvilinea mantenendosi ad altezza costante rispetto alla Terra, come se fosse una piccola luna ...

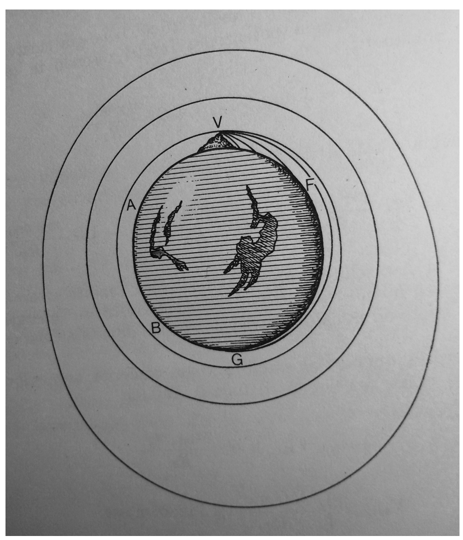

Figura 4: Il disegno originale di Newton.

2.2 La Luna 'cade' sulla Terra. Con quale accelerazione?

Quello che in termini euristici si è cercato di spiegare nella sezione precedente è che la *Luna, sotto l'azione della forza di gravità, cade in direzione della Terra, mancandola continuamente a causa della sua elevata velocità tangenziale.*

Qui si vuole determinare l'intensità dell'accelerazione della Luna nell'ipotesi che essa si muova di moto circolare uniforme attorno alla Terra e che sia soggetta all'azione della sola forza di gravità terrestre.

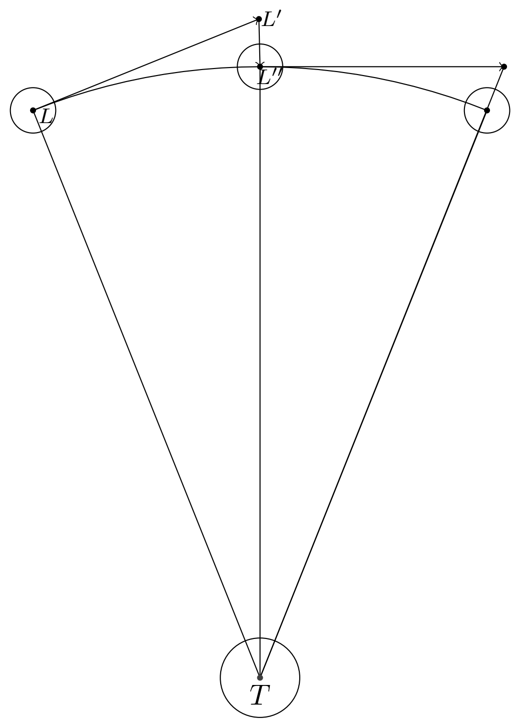

Figura 5: L'orbita della luna.

Nell'intervallino di tempo dt la Luna, inizialmente nella posizione L, si sposta di un tratto

$$LL' = v\,dt$$

lungo la tangente all'orbita e di un tratto

$$L'L'' = \frac{1}{2}a\,(dt)^2$$

dove a è l'accelerazione di gravità esercitata dalla Terra sulla Luna. Trascorso questo intervallino di tempo, la Luna raggiunge la posizione L''. Il triangolo TLL' è retto in L, per il teorema di Pitagora si ha

$$(TL'' + L''L')^2 = TL^2 + (LL')^2$$

ovvero

$$2TL'' \cdot L''L' + L''L'^2 = LL'^2$$

Indicando con R la distanza Terra-Luna (raggio dell'orbita) si ottiene

$$2R \cdot L''L' + L''L'^2 = LL'^2$$

$$2R\left(\frac{1}{2}\,a\,dt^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,a\,dt^2\right)^2 = (v\,dt)^2$$

Nell'ultima uguaglianza dt è una quantità infinitesima; segue che dt^4 è una quantità molto più piccola rispetto a dt^2 e può essere trascurata

$$R\left(a\,dt^2\right) = (v\,dt)^2$$

ossia

$$a = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2\frac{R}{T^2}$$

Sapendo che il periodo della Luna è $T = 27,3\,\text{giorni} = 2,35 \cdot 10^6\,\text{s}$ e che il suo raggio orbitale vale $R = 3,844 \cdot 10^8\,\text{m}$ si ottiene

$$a = 4\pi^2\,\frac{3,844 \cdot 10^8}{2,35 \cdot 10^6\,\text{s}} = 2,7 \cdot 10^{-3}\,\text{m/s}^2 = 0,0027\,\text{m/s}^2$$

Quindi l'accelerazione a della Luna diminuisce con l'altezza. Essa è 3633 più piccola dell'accelerazione di gravità g in prossimità della superficie terrestre ($g = 9,81\,\text{m/s}^2$), cioè

$$\frac{g}{a} \sim 3633$$

Infine sapendo che il raggio terrestre è $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ Newton scoprì che

$$\frac{g}{a} = \frac{R^2}{R_T^2}$$

Segue che la *forza con la quale la Terra attrae la Luna è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due pianeti.*

2.3 Legge di gravitazione universale.

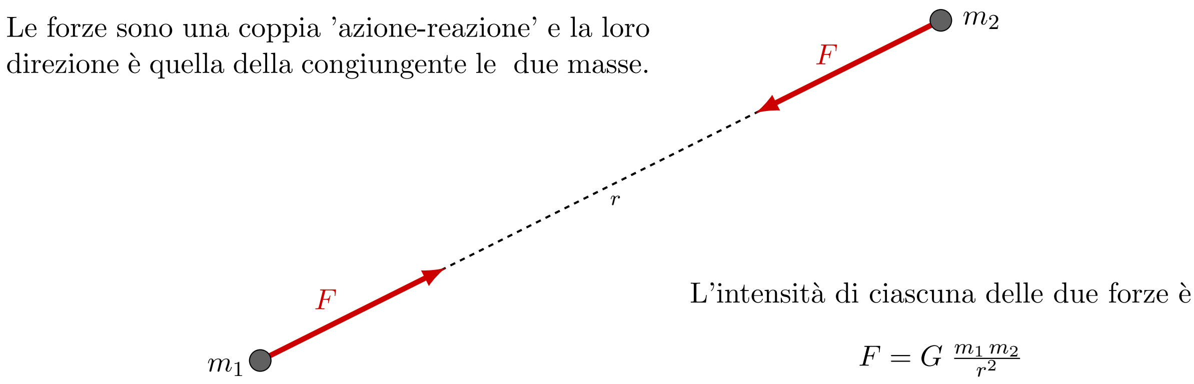

Figura 6: Legge di gravitazione di Newton.

Due corpi, rispettivamente di massa m_1 e m_2, si attraggono con una forza $\mathbf{F}$ (detta forza di gravità) la cui intensità vale

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

dove r è la distanza tra le due masse mentre G è una costante *universale*: la stessa per tutte le coppie di corpi nell'universo. Il valore di G è stato determinato per la prima volta da Cavendish nel 1798 mediante un famoso esperimento

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$$

Il valore di G, molto piccolo, spiega per quale motivo la forza di attrazione tra due oggetti qualsiasi della nostra esperienza quotidiana risulta, nei fatti, impercettibile.

2.4 La massa del Sole e quella della Terra

Si possono trarre molte informazioni sul moto dei pianeti facendo l'ipotesi che il loro moto di rivoluzione attorno al sole sia circolare uniforme. In questa sezione si terrà unicamente conto dell'interazione tra un dato pianeta, diciamo P, e il Sole mentre si trascureranno le interazioni tra i diversi pianeti. Se r è il raggio dell'orbita e v il modulo della velocità del pianeta, allora il pianeta P è soggetto alla sola azione della forza centripeta

$$F_c = m_p\,\frac{v^2}{r} \tag{2.1}$$

dove m_p indica la massa del pianeta e $a_c = \frac{v^2}{r}$ la sua accelerazione centripeta.

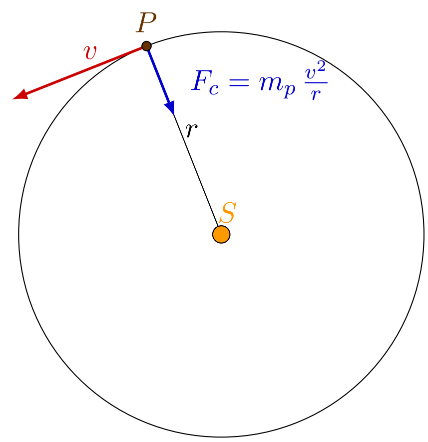

Figura 7: Il pianeta P descrive, nel suo moto di rivoluzione attorno al sole, un'orbita circolare e la sua velocità è costante in modulo.

Allora la forza centripeta che agisce sul pianeta deve coincidere con la forza di attrazione gravitazionale:

$$\frac{m_p v^2}{r} = G\frac{M_s m_p}{r^2} \tag{2.2}$$

dove M_s indica la massa del sole. Ora, basta ricordare che il modulo v della velocità con cui il pianeta orbita attorno al sole è dato da

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2.3}$$

Sostituendo il valore di v scritto qui sopra in 2.2, si ottiene:

$$\frac{4\pi^2 m_p\, r}{T^2} = G\,\frac{m_p\, M_s}{r^2} \tag{2.4}$$

Semplificando l'ultima uguaglianza si ottiene:

$$M_s = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{r^3}{T^2} \tag{2.5}$$

Conoscendo il periodo di rivoluzione del pianeta e il suo raggio orbitale è possibile calcolare la massa del sole. Per esempio, se il pianeta in esame è la Terra, il suo periodo orbitale è $T = 365$ giorni $= 3,154 \cdot 10^7$ s mentre la distanza Terra–Sole è $r = 150\,000\,000$ km $= 1,50 \cdot 10^{11}$ m. Pertanto si ricava

$$M_s = \frac{4\pi^2}{(6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2})}\,\frac{(1,50 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{(3,154 \cdot 10^7\ \mathrm{s})^2} = 2,00 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \tag{2.6}$$

La massa della Terra.

Per calcolare la massa della Terra basta ricordare il periodo di rivoluzione lunare ($T = 27,3\,\text{giorni} = 2,40 \cdot 10^6\,\text{s}$) e il raggio della sua orbita attorno alla Terra ($r = 3,844 \cdot 10^8\,\text{m}$). Si ottiene:

$$M_T = \frac{4\pi^2}{(6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2)} \frac{(3,844 \cdot 10^8\,\text{m})^3}{(2,40 \cdot 10^6\,\text{s})^2} = 5,84 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \tag{2.7}$$

2.5 Deduzione della terza legge di Keplero dalla legge di gravitazione universale

I calcoli eseguiti sopra permettono di ottenere, nel caso di orbite circolari, la terza legge di Keplero come conseguenza della legge di gravitazione universale. Infatti da (2.4) si ottiene:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_s} \tag{2.8}$$

Quindi il valore della costante di proporzionalità che compare nella terza legge di Keplero è

$$h = \frac{4\pi^2}{G\,M_s} \tag{2.9}$$

Tale costante dipende dalla massa del Sole, più precisamente essa *dipende dalla massa della stella (o pianeta) attorno alla quale avviene la rotazione* mentre *non* dipende dalla massa del pianeta orbitante.

3 Campo gravitazionale

L'idea di campo gravitazionale è la seguente: si consideri una massa M e una certa regione di spazio attorno a essa. Per verificare l'esistenza della forza gravitazionale in un punto P prefissato della regione di spazio occorre servirsi di una *massa m di prova*, molto più piccola di M. Si pone tale massa in P e si misura la forza gravitazionale

$$\mathbf{F} = G\frac{mM}{r^2} \tag{3.1}$$

Si chiama campo gravitazionale in P il vettore che si ottiene dal rapporto tra $\mathbf{F}$ e la massa di prova.

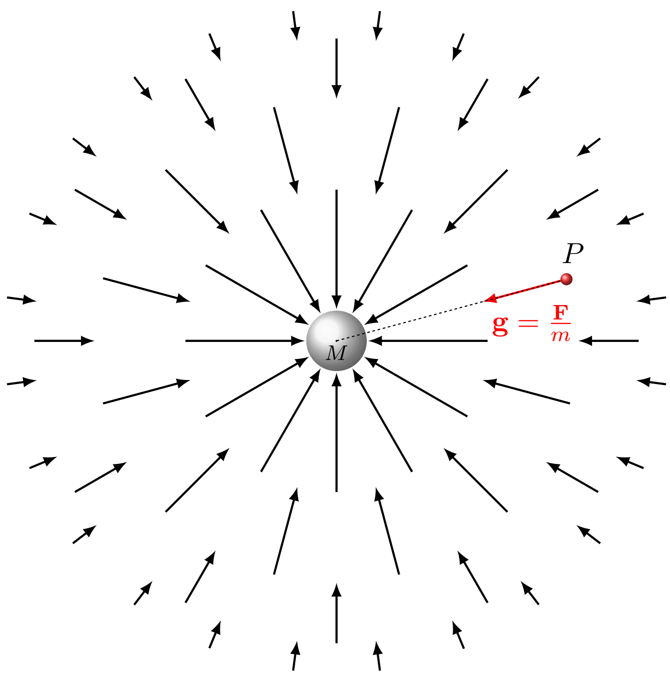

Figura 8: Campo gravitazionale generato dalla massa M. Nel punto P è stata posta la carica di prova $m \ll M$

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{3.2}$$

È stato indicato con la lettera $\mathbf{g}$ perchè tale vettore coincide con l'accelerazione di gravità ; la sua intensità si può esprimere anche così

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2} \tag{3.3}$$

L'unità di misura di $\mathbf{g}$, nel Sistema Internazionale, è $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

3.1 Come varia g allontanadosi dalla Terra

L'uguaglianza (3.3) permette di calcolare il valore dell'accelerazione di gravità a distanze diverse dal centro della Terra. Per esempio, se al posto di M e r si sostituisce rispettivamente massa e raggio terrestri ($r_T = 6,37 \cdot 10^6$ m, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg) si trova il ben noto valore dell'intensità di **g** sulla superficie della Terra:

$$g = G\frac{M_T}{r_T^2} = (6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2})\ \frac{5,97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6,37 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2} = 9,81\ \mathrm{m/s^2} \tag{3.4}$$

Nella seguente tabella vengono riportati alcuni valori di g in corrispondenza di punti che si trovano a differenti altezze rispetto alla superficie terrestre

Altezza dalla superficie terrestre (in km)	g in m/s^2	
0	9,813	
8,848	9,786	Everest
90	9,542	Mesosfera
1000	7,331	
10000	1,486	
20000	0,573	
30000	0,301	
35000	0,233	altezza orbita di satelliti metereologici
384000	0,003	distanza Terra-Luna

(Per calcolare g a un'altezza h dalla superficie terrestre bisogna sostituire a r_T il valore $r_T + h$ in (3.4)).

4 Massa inerziale e massa gravitazionale

Si consideri un corpo che si trova in prossimità della superficie di un pianeta o di una stella, per esempio, vicino alla superficie terrestre. La legge di gravitazione universale afferma che su di esso agisce la forza

$$\mathbf{F} = G\frac{m\,M_T}{r^2} \tag{4.1}$$

dove M_T e r sono la massa e il raggio terrestri. La forza espressa dall'uguaglianza (4.1) è quella che solitamente si chiama 'peso del corpo'. Quindi, misurando direttamente il peso $\mathbf{F}$ è possibile ricavare la massa del corpo. Tale valore (ottenuto dalla legge di gravitazione universale) rappresenta la massa gravitazionale del corpo e sarà pertanto denotato con m_g:

$$m_g = \frac{F\,r^2}{G\,M_T} \tag{4.2}$$

Tuttavia, il concetto di massa è già stato introdotto in dinamica, precisamente quando si è enunciato la seconda legge della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{4.3}$$

La quantità m che entra in gioco nell'uguaglianza (4.3) rappresenta la misura dell'inerzia del corpo, essa è la cosiddetta massa inerziale e per questo motivo viene denotata con m_i

$$m_i = \frac{F}{a} \tag{4.4}$$

Ovviamente la massa inerziale può essere determinata direttamente per via sperimentale: si applica al corpo una forza meccanica di intensità nota e si misura l'accelerazione che essa provoca, il rapporto tra l'intensità della forza e l'accelerazione fornisce la misura della massa inerziale. Si noti che in questo esperimento la forza gravitazionale non esercita alcun ruolo, anzi sarebbe preferibile poter fare le misurazioni necessarie in assenza di gravità!

Allora è spontaneo chiedersi se le masse misurate nei due modi siano effettivamente la stessa cosa. Nella storia, a partire da Newton stesso, sono stati escogitati molti procedimenti per mettere in luce eventuali differenze tra massa inerziale e gravitazionale, ma le uniche differenze riscontrate erano riconducibili ai soli errori di misura dei dati sperimentali. Pertanto, si è assunto che massa inerziale e gravitazionale coincidessero

$$m_i = m_g \tag{4.5}$$

In fisica classica, la coincidenza tra massa inerziale e gravitazionale appare come un fatto per certi versi misterioso e del tutto accidentale. Sarà Einstein, con la teoria della relatività generale a chiarirne il significato.