

Rette nel piano. Esercizi.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Ultima modifica: ottobre 2021.

1 Esercizi

Esercizio 1.1. Nel piano \mathbb{R}^2 si considerino i vettori $A = (\frac{1}{2}, 1)$ e $B = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{3})$

1. A è parallelo a B ?
2. A è ortogonale B ?
3. Trovare la distanza di A da B .
4. Determinare il vettore $2A - 6B$
5. Determinare $P_B(A)$ cioè la proiezione di A lungo B .

Esercizio 1.2. Nel piano \mathbb{R}^2 si considerino i vettori $A = (-1, \frac{3}{2})$ e $B = (\frac{1}{2}, 2)$

1. Determinare la lunghezza di A e quella di B .
2. Determinare $P_B(A)$ cioè la proiezione di A lungo B .

Esercizio 1.3. Si consideri la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

1. Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per $A = (-1, 4)$ e parallela a r .
2. Scrivere un'equazione cartesiana di s .

⁰Nome file: 'esercizi_rette_e_piani_2012.tex'

Esercizio 1.4 (Asse di un segmento.). *Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente per estremi $P = (\frac{5}{2}, 2)$, $Q = (-\frac{1}{2}, 1)$.*

Esercizio 1.5 (Posizioni reciproche di due rette nel piano.). *Si considerino le seguenti coppie di rette*

$$1) \quad r : \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 + \frac{5}{3}u \\ y = -4 + \frac{1}{3}u \end{cases}$$

$$2) \quad r : \begin{cases} x = -4 + \frac{1}{3}t \\ y = 5 + \frac{2}{3}t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 + u \\ y = 1 + 2u \end{cases}$$

$$3) \quad r : \begin{cases} x = 6 - \frac{2}{5}t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 4u \\ y = 3 + 5u \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande:

r e s sono parallele distinte? sono coincidenti? sono incidenti? Nel caso siano incidenti si determini il punto di intersezione.

Esercizio 1.6 (Punto simmetrico rispetto ad un punto dato.). *Siano $A = (3, -5)$ e $B = (7, 2)$. Si determini il punto A' simmetrico di A rispetto a B .*

Esercizio 1.7 (Retta per due punti.). *Trovare le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (-3, 1)$ e $B = (2, 5)$. Il punto $C = (17, 17)$ sta sulla retta r ?*

Esercizio 1.8 (Da equazioni cartesiane a equazioni parametriche). *Scrivere le equazioni parametriche della retta s avente equazione cartesiana*

$$2x - \sqrt{5}y + 1 = 0$$

Esercizio 1.9 (Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane.). *Scrivere l'equazione cartesiana della retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

Esercizio 1.10 (Distanza di un punto da una retta). *Si consideri la retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{3}t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Determinare la distanza del punto $P = (-1, 3)$ dalla retta r .

Esercizio 1.11 (Moto di una particella nel piano). *Il moto piano di una particella P è dato dalla composizione di due moti rettilinei uniformi indipendenti: uno lungo l'asse x con velocità di 3 m/s l'altro lungo l'asse y con velocità di 5 m/s.*

Sapendo che la particella passa per il punto $A = (-1, 2)$, determinare le equazioni che descrivono il moto della particella P . Qual è la sua traiettoria?

Esercizio 1.12 (Area di un triangolo). *Trovare l'area del triangolo individuato dalle rette di equazioni cartesiane $y = x + 2$, $y = 2x - 1$ e $x + 2y = 6$.*

Esercizio 1.13 (Proiezione di un vettore lungo una retta). *Determinare la proiezione ortogonale di $A = (5, 4)$ lungo il vettore V , dove V è il vettore di direzione della retta di equazione $3x - y = 0$.*

Esercizio 1.14. *Scrivere le equazioni cartesiane delle due rette che distano $\sqrt{5}$ dalla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$.*

Esercizio 1.15 (Simmetrico di un punto rispetto ad una retta). *Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_a} \mathbb{R}^2$ la simmetria assiale il cui asse a ha equazione $x - 5y + 10 = 0$. Sapendo che $P = (7, 6)$, determinare $S_a(P)$. In altre parole, determinare il simmetrico di P rispetto alla simmetria di asse a .*

Esercizio 1.16. *Si consideri il punto $P = (-3, 2)$ e la retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y &= t \end{cases}$$

con t che varia in \mathbb{R} .

1. *Trovare le coordinate del punto P' , simmetrico di P rispetto alla retta r .*
2. *Trovare sulla retta r tutti i punti Q per i quali l'area del triangolo $PP'Q$ è uguale a 18.*

Risposta: $P' = \left(\frac{21}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. $Q_1 = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{19}{5}\right)$, $Q_2 = \left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

Esercizio 1.17 (Baricentro del triangolo). *Si considerino i punti $A = (2, 1)$, $B = (6, 2)$. Determinare le coordinate del punto C del piano in modo che il triangolo ABC abbia per baricentro il punto $G = (5, 3)$.*

Risposta: $C = (7, 6)$.

Esercizio 1.18. *Si consideri il triangolo di vertici $P = (-1, 0)$, $Q = (3, 2)$, $R = (1, 3)$*

1. Trovare il baricentro G (punto di intersezione delle mediane) del triangolo PQR .

Per il baricentro di un triangolo vale la seguente proprietà :

in ogni triangolo il baricentro divide ciascuna mediana in due parti: quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

2. Verificare che, nel caso in esame,

$$RG = 2GM_1$$

dove M_1 è il punto medio del lato PQ .

3. Trovare le coordinate del circocentro C (punto di intersezione degli assi) del triangolo PQR .

4. Trovare le coordinate dell'ortocentro O (punto di intersezione delle altezze) del triangolo PQR .

5. Verificare che i punti O, G, C sono allineati e che

$$d(O, G) = 2d(G, C)$$

Risposta: $G = \left(1, \frac{5}{3}\right)$, $C = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right)$, $O = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right)$,

2 Soluzioni

Esercizio 1.1

1. A e B non hanno la stessa direzione perchè non sono l'uno multiplo dell'altro.
2. $A \cdot B = -\frac{11}{12} \neq 0$. Quindi A e B non sono ortogonali.
3. $\overline{AB} = \|B - A\| = \frac{1}{3}\sqrt{85}$.
4. $2A - 6B = (16, 0)$.
5. $(\frac{165}{458}, -\frac{33}{687})$

Esercizio 1.2

1. $\|A\| = \frac{1}{2}\sqrt{13}$; $\|B\| = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
2. $P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} B = (\frac{10}{34}, \frac{20}{17})$

Esercizio 1.3

1. Equazioni parametriche retta s : $\begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = 4 - 2u \end{cases}$
2. Equazione cartesiana di s : $2x + 3y - 10 = 0$.

Esercizio 1.4 Equazioni parametriche dell'asse del segmento di estremi P e Q : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \end{cases}$

Esercizio 1.5

1. r e s sono incidenti. $r \cap s = (\frac{33}{4}, -\frac{11}{4})$.
2. r e s sono parallele distinte.
3. r e s sono parallele coincidenti.

Esercizio 1.6 $A' = (11, 9)$.

Esercizio 1.7 Equazioni parametriche di r : $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Il punto C sta su r .

Esercizio 1.8 Equazioni parametriche di s : $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.9 $-6\sqrt{3}x + 6y - 2 + 3\sqrt{6} = 0$.

Esercizio 1.10 Distanza = $\frac{7\sqrt{73}}{73}$.

Esercizio 1.11 Equazioni del moto di P : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.12 Area triangolo = $\frac{49}{30}$.

Esercizio 1.13 Proiezione di A lungo $V = P_V(A) = \left(\frac{17}{10}, \frac{51}{10}\right)$.

Esercizio 1.14 Le equazioni delle due rette richieste sono $x - 2y - 5 = 0$ e $x - 2y + 5 = 0$.

Esercizio 1.15 $S_a(P) = (8, 1)$.