

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO
ESERCIZI

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

1	Esercizi	2
1.1	Equazioni parametriche e equazioni cartesiane di rette in \mathbb{R}^3	2
1.2	Equazione cartesiana di un piano in \mathbb{R}^3	3
1.3	Equidistanza rispetto a due punti prestabiliti	3
1.4	Mutua posizione di due rette nello spazio	3
1.5	Moto rettilineo uniforme di un punto nello spazio	4
1.6	Simmetrico di un punto rispetto a un piano, rispetto a una retta, rispetto a un punto	4
1.7	Distanza di un punto da una retta, distanza di un punto da un piano	5
1.8	Piano contenente una retta e passante per un punto	5
1.9	Determinanti	5
2	Soluzioni	6

⁰Nome file: 'esercizi_rette_e_piani_nello_spazio_2021.tex'

1 Esercizi

1.1 Equazioni parametriche e equazioni cartesiane di rette in \mathbb{R}^3

Esercizio 1.1. Scrivere equazioni parametriche dell'asse x , dell'asse y , dell'asse z

Risposta

Esercizio 1.2. Scrivere equazioni cartesiane dell'asse x , dell'asse y , dell'asse z

Risposta

Esercizio 1.3. Scrivere equazioni parametriche e equazioni cartesiane della retta di \mathbb{R}^3 contenente il punto $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{4})$ e parallela all'asse z .

Risposta

Esercizio 1.4. Scrivere equazioni parametriche della retta di \mathbb{R}^3 contenente il punto $(0, -\frac{1}{3}, 2)$ e parallela alla retta $s : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Risposta

Esercizio 1.5. Scrivere equazioni parametriche della retta di \mathbb{R}^3 contenente il punto $(-\frac{1}{5}, 0, 2)$ e parallela alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Risposta

Esercizio 1.6. Scrivere equazioni parametriche della retta di \mathbb{R}^3 contenente i punti $A = (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, $B = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{6})$.

Risposta

Esercizio 1.7. Scrivere equazioni parametriche della retta di \mathbb{R}^3 contenente il punto di intersezione delle rette

$$r : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = -u \end{cases}$$

$(t, u \in \mathbb{R})$ e parallela alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$.

Risposta

1.2 Equazione cartesiana di un piano in \mathbb{R}^3

Esercizio 1.8. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano contenente il punto $(1, -2, 3)$ e ortogonale alla retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = 1 \end{cases}$$

con $u \in \mathbb{R}$.

Risposta

Esercizio 1.9. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano contenente l'origine e parallelo al piano di equazione cartesiana $z + 1 = 0$.

Risposta

Esercizio 1.10. Scrivere un'equazione cartesiana per il piano contenente il punto $(\frac{1}{5}, -1, +\frac{2}{5})$ e parallelo al piano di equazione cartesiana $2x + 3y - 4z + 1 = 0$.

Risposta

1.3 Equidistanza rispetto a due punti prestabiliti

Esercizio 1.11. Trovare un'equazione cartesiana per il luogo geometrico dei punti di \mathbb{R}^3 che sono equidistanti dai punti $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, 0, 3)$.

Risposta

Esercizio 1.12. Trovare un'equazione cartesiana per il luogo geometrico dei punti di \mathbb{R}^3 , equidistanti da $(0, 1, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

Risposta

1.4 Mutua posizione di due rette nello spazio

Esercizio 1.13. Per ognuna delle seguenti coppie di rette stabilire se esse sono parallele distinte, parallele coincidenti, incidenti o sghembe (i parametri t e u variano in \mathbb{R}).

$$(1) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 + 2u \\ z = 2 + u \end{cases}$$
$$(2) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}u \\ y = 2 - \frac{1}{2}u \\ z = -3 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$(3) \quad r : \begin{cases} x = -2 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 - u \\ y = u \\ z = u - 3 \end{cases}$$

$$(4) \quad r : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 3u \\ y = 1 - u \\ z = 1 + 2u \end{cases}$$

Risposta

1.5 Moto rettilineo uniforme di un punto nello spazio

Esercizio 1.14. *Il moto di un punto mobile P è dato dalla composizione di tre moti rettilinei uniformi indipendenti: uno lungo l'asse x con velocità $v_x = 2$ m/s, uno lungo l'asse y con velocità $v_y = 3$ m/s e infine uno lungo l'asse z con velocità $v_z = 4$ m/s.*

Sapendo che il punto mobile passa per $A = (-1, 5, 11)$, trovare le equazioni che descrivono il moto di P , cioè trovare la legge oraria di P . Qual è la sua traiettoria?

Risposta

Esercizio 1.15. *Una particella P si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3}, 3)$. Sapendo che P transita per l'origine degli assi, trovare le leggi orarie che descrivono il moto. Qual è l'intensità del vettore velocità?*

Risposta

1.6 Simmetrico di un punto rispetto a un piano, rispetto a una retta, rispetto a un punto

Esercizio 1.16. *Trovare il simmetrico P' del punto $P = (2, 0, -3)$ rispetto al punto $Q = (\frac{3}{2}, 1, 1)$.*

Risposta

Esercizio 1.17. *Trovare il simmetrico P' del punto $P = (1, 1, 1)$ rispetto al piano π di equazioni cartesiane $2x - y + 3z + 2 = 0$.*

Risposta

Esercizio 1.18. *Trovare il simmetrico P' del punto $P = (1, 1, 3)$ rispetto alla retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.*

Risposta

1.7 Distanza di un punto da una retta, distanza di un punto da un piano

Esercizio 1.19. Determinare la distanza del punto $A = (1, 0, -1)$ dalla retta r di equazioni

$$\text{parametriche } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

[Risposta](#)

Esercizio 1.20. Determinare la distanza del punto $A = (0, -2, -3)$ dal piano π di equazione cartesiana $2x - 2y + z + 2 = 0$.

[Risposta](#)

1.8 Piano contenente una retta e passante per un punto

Esercizio 1.21. Trovare un'equazione cartesiana del piano contenente la retta $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e passante per il punto $(0, 2, 0)$.

[Risposta](#)

1.9 Determinanti

Esercizio 1.22. Calcolare il volume (con segno) del parallelepipedo generato dalle seguenti terne di vettori

1. $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (0, -4, 5)$.
2. $A = (0, -2, 4)$, $B = (7, -1, 0)$, $C = (11, 0, -3)$.
3. $A = (2, -3, 1)$, $B = (1, 11, -3)$, $C = (4, -6, 2)$.

[Risposta](#)

2 Soluzioni

(Per tornare al testo dell'esercizio, cliccare sul numero blu).

Esercizio 1.1

$$\text{Asse } x: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \text{ asse } z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Esercizio 1.2

$$\text{Asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ asse } z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.3

$$\text{Equazioni parametriche: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -\frac{3}{4} + t \end{cases}, \text{ equazioni cartesiane: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 1.4

$$\begin{cases} x = -u \\ y = -\frac{1}{3} + 3u \\ z = 2 + 2u \end{cases}.$$

Esercizio 1.5

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} + 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Esercizio 1.6

L'equazione, in forma vettoriale, della retta per due punti è

$$P = A + (B - A)t$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ e } P = (x, y, z). \text{ In coordinate si ottiene: } \begin{cases} x = 2 + \frac{5}{2}t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Esercizio 1.7

$r \cap s = (-2, 1, 2)$. Un vettore di direzione della retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$

è $(0, 1, -1)$. Equazioni parametriche della retta cercata sono: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + k \\ z = 2 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$

Esercizio 1.8

$$x - y - 3 = 0.$$

Esercizio 1.9

$$z = 0.$$

Esercizio 1.10

$$2\left(x - \frac{1}{5}\right) + 3(y + 1) - 4\left(z - \frac{2}{5}\right) = 0, \text{ ossia: } 2x + 3y - 4z + \frac{21}{5} = 0.$$

Esercizio 1.11

Il luogo richiesto è il piano di equazione cartesiana: $2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) - 2(z - 2) = 0$,
ossia: $4x + 2y - 4z + 9 = 0$.

Esercizio 1.12

Il luogo richiesto è il piano di equazione cartesiana: $\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3}\left(y - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(z - \frac{3}{4}\right) = 0$,
ossia: $24x + 48y - 36z - 1 = 0$.

Esercizio 1.13

1. r, s sono sghembe.
2. r, s sono parallele coincidenti.
3. r, s sono incidenti.
4. r, s sono parallele distinte.

Esercizio 1.14 La legge oraria del punto mobile è $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = +5 + 3t \\ z = +11 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. La traiettoria

di P è l'immagine della funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ descritta sopra: si tratta di una retta.

Esercizio 1.15 $\begin{cases} x = +2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Il modulo del vettore velocità è $v = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2 + 3^2} = 5$.

Esercizio 1.16 $P' = 2Q - P = (1, 2, 5)$.

Esercizio 1.17 $P' = \left(-\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{11}{7}\right)$.

Esercizio 1.18 $P' = \left(\frac{5}{7}, \frac{17}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

Esercizio 1.19 $d(A, r) = \frac{1}{38}\sqrt{494}$.

Esercizio 1.20 $d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) - 3 + 2|}{3} = 1$.

Esercizio 1.21 $-3x - y + 5z + 2 = 0$.

Esercizio 1.22

$$1. \quad \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

$$2. \quad \det \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 11 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$3. \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 11 & -3 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$