

# VETTORI E RETTE NEL PIANO

## ESERCIZI

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Ultima modifica: ottobre 2023.

### 1 Esercizi la cui soluzione prevede l'utilizzo di vettori e di equazioni parametriche di rette.

**Esercizio 1.1.** *Nel piano  $\mathbb{R}^2$  si considerino i vettori  $A = (\frac{1}{2}, 1)$  e  $B = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{3})$*

1. *A è parallelo a B?*
2. *A è ortogonale B?*
3. *Trovare la distanza di A da B.*
4. *Determinare il vettore  $2A - 6B$*
5. *Determinare  $P_B(A)$  cioè la proiezione di A lungo B.*

**Esercizio 1.2.** *Nel piano  $\mathbb{R}^2$  si considerino i vettori  $A = (-1, \frac{3}{2})$  e  $B = (\frac{1}{2}, 2)$*

1. *Determinare la lunghezza di A e quella di B.*
2. *Determinare  $P_B(A)$  cioè la proiezione di A lungo B.*

**Esercizio 1.3.** *Si consideri la retta r di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

1. *Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per  $A = (-1, 4)$  e parallela a r.*

---

<sup>0</sup>Nome file: 'esercizi\_vettori\_e\_rette.2023.tex'

2. Scrivere un'equazione cartesiana di  $s$ .

**Esercizio 1.4** (Asse di un segmento.). *Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente per estremi  $P = (\frac{5}{2}, 2)$ ,  $Q = (-\frac{1}{2}, 1)$ .*

**Esercizio 1.5** (Posizioni reciproche di due rette nel piano.). *Si considerino le seguenti coppie di rette*

$$\begin{array}{ll} 1) & r : \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases} & s : \begin{cases} x = 2 + \frac{5}{3}u \\ y = -4 + \frac{1}{3}u \end{cases} \\ 2) & r : \begin{cases} x = -4 + \frac{1}{3}t \\ y = 5 + \frac{2}{3}t \end{cases} & s : \begin{cases} x = 2 + u \\ y = 1 + 2u \end{cases} \\ 3) & r : \begin{cases} x = 6 - \frac{2}{5}t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \end{cases} & s : \begin{cases} x = 1 - 4u \\ y = 3 + 5u \end{cases} \end{array}$$

*Si risponda alle seguenti domande:*

*$r$  e  $s$  sono parallele distinte? sono coincidenti? sono incidenti? Nel caso siano incidenti si determini il punto di intersezione.*

**Esercizio 1.6** (Punto simmetrico rispetto ad un punto dato.). *Siano  $A = (3, -5)$  e  $B = (7, 2)$ . Si determini il punto  $A'$  simmetrico di  $A$  rispetto a  $B$ .*

**Esercizio 1.7** (Retta per due punti.). *Trovare le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A = (-3, 1)$  e  $B = (2, 5)$ . Il punto  $C = (17, 17)$  sta sulla retta  $r$ ?*

**Esercizio 1.8** (Da equazioni cartesiane a equazioni parametriche). *Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  avente equazione cartesiana*

$$2x - \sqrt{5}y + 1 = 0$$

**Esercizio 1.9** (Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane.). *Scrivere l'equazione cartesiana della retta  $r$  di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

**Esercizio 1.10** (Distanza di un punto da una retta). *Si consideri la retta  $r$  di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{3}t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

*Determinare la distanza del punto  $P = (-1, 3)$  dalla retta  $r$ .*

**Esercizio 1.11** (Moto di una particella nel piano). *Il moto piano di una particella  $P$  è dato dalla composizione di due moti rettilinei uniformi indipendenti: uno lungo l'asse  $x$  con velocità di 3 m/s l'altro lungo l'asse  $y$  con velocità di 5 m/s.*

*Sapendo che la particella passa per il punto  $A = (-1, 2)$ , determinare le equazioni che descrivono il moto della particella  $P$ . Qual è la sua traiettoria?*

**Esercizio 1.12** (Area di un triangolo). *Trovare l'area del triangolo individuato dalle rette di equazioni cartesiane  $y = x + 2$ ,  $y = 2x - 1$  e  $x + 2y = 6$ .*

**Esercizio 1.13** (Proiezione di un vettore lungo una retta). *Determinare la proiezione ortogonale di  $A = (5, 4)$  lungo il vettore  $V$ , dove  $V$  è il vettore di direzione della retta di equazione  $3x - y = 0$ .*

**Esercizio 1.14.** *Scrivere le equazioni cartesiane delle due rette che distano  $\sqrt{5}$  dalla retta di equazione  $y = \frac{1}{2}x$ .*

**Esercizio 1.15** (Simmetrico di un punto rispetto ad una retta). *Sia  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_a} \mathbb{R}^2$  la simmetria assiale il cui asse  $a$  ha equazione  $x - 5y + 10 = 0$ . Sapendo che  $P = (7, 6)$ , determinare  $S_a(P)$ . In altre parole, determinare il simmetrico di  $P$  rispetto alla simmetria di asse  $a$ .*

**Esercizio 1.16.** *Si consideri il punto  $P = (-3, 2)$  e la retta  $r$  di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

*con  $t$  che varia in  $\mathbb{R}$ .*

1. *Trovare le coordinate del punto  $P'$ , simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $r$ .*
2. *Trovare sulla retta  $r$  tutti i punti  $Q$  per i quali l'area del triangolo  $PP'Q$  è uguale a 18.*

**Esercizio 1.17** (Baricentro del triangolo). *Si considerino i punti  $A = (2, 1)$ ,  $B = (6, 2)$ . Determinare le coordinate del punto  $C$  del piano in modo che il triangolo  $ABC$  abbia per baricentro il punto  $G = (5, 3)$ .*

**Esercizio 1.18.** Si consideri il triangolo di vertici  $P = (-1, 0)$ ,  $Q = (3, 2)$ ,  $R = (1, 3)$

1. Trovare il baricentro  $G$  (punto di intersezione delle mediane) del triangolo  $PQR$ .

Per il baricentro di un triangolo vale la seguente proprietà :

in ogni triangolo il baricentro divide ciascuna mediana in due parti: quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

2. Verificare che, nel caso in esame,

$$RG = 2GM_1$$

dove  $M_1$  è il punto medio del lato  $PQ$ .

3. Trovare le coordinate del circocentro  $C$  (punto di intersezione degli assi) del triangolo  $PQR$ .

4. Trovare le coordinate dell'ortocentro  $O$  (punto di intersezione delle altezze) del triangolo  $PQR$ .

5. Verificare che i punti  $O, G, C$  sono allineati e che

$$d(O, G) = 2d(G, C)$$

## 2 Soluzioni

### Esercizio 1.1

1.  $A$  e  $B$  non hanno la stessa direzione perchè non sono l'uno multiplo dell'altro.
2.  $A \cdot B = -\frac{11}{12} \neq 0$ . Quindi  $A$  e  $B$  non sono ortogonali.
3.  $\overline{AB} = \|B - A\| = \frac{1}{3}\sqrt{85}$ .
4.  $2A - 6B = (16, 0)$ .
5.  $(\frac{165}{458}, -\frac{33}{687})$

### Esercizio 1.2

1.  $\|A\| = \frac{1}{2}\sqrt{13}$ ;  $\|B\| = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
2.  $P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} B = (\frac{10}{34}, \frac{20}{17})$

### Esercizio 1.3

1. Equazioni parametriche retta  $s$ :  $\begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = 4 - 2u \end{cases}$
2. Equazione cartesiana di  $s$ :  $2x + 3y - 10 = 0$ .

**Esercizio 1.4** Equazioni parametriche dell'asse del segmento di estremi  $P$  e  $Q$ :  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \end{cases}$

### Esercizio 1.5

1.  $r$  e  $s$  sono incidenti.  $r \cap s = (\frac{33}{4}, -\frac{11}{4})$ .
2.  $r$  e  $s$  sono parallele distinte.
3.  $r$  e  $s$  sono parallele distinte.

**Esercizio 1.6**  $A' = (11, 9)$ .

**Esercizio 1.7** Equazioni parametriche di  $r$ :  $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Il punto  $C$  sta su  $r$ .

**Esercizio 1.8** Equazioni parametriche di  $s$ :  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Esercizio 1.9**  $-6\sqrt{3}x + 6y - 2 + 3\sqrt{6} = 0$ .

**Esercizio 1.10** Distanza =  $\frac{7\sqrt{73}}{73}$ .

**Esercizio 1.11** Equazioni del moto di  $P$ :  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Esercizio 1.12** Area triangolo =  $\frac{49}{30}$ .

**Esercizio 1.13** Proiezione di  $A$  lungo  $V = P_V(A) = \left(\frac{17}{10}, \frac{51}{10}\right)$ .

**Esercizio 1.14** Le equazioni delle due rette richieste sono  $x - 2y - 5 = 0$  e  $x - 2y + 5 = 0$ .

**Esercizio 1.15**  $S_a(P) = (8, 1)$ .

**Esercizio 1.16**

1.  $P' = \left(\frac{21}{5}, -\frac{8}{5}\right)$  (simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $r$ ).

2.  $Q_1 = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{19}{5}\right)$ ,  $Q_2 = \left(\frac{13}{5}, \frac{21}{5}\right)$ .

**Esercizio 1.17**  $C = (7, 6)$ .

**Esercizio 1.18**  $G = \left(1, \frac{5}{3}\right)$ ,  $C = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right)$ ,  $O = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right)$ .