LEZIONE 2

Rette nel piano

Equazioni parametriche e cartesiane

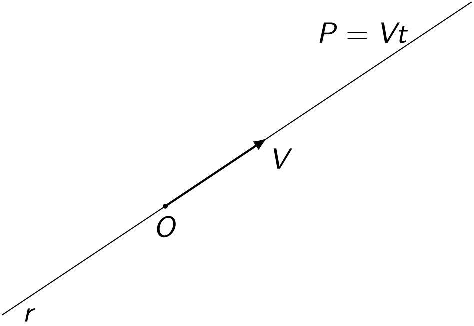
Equazione parametrica in forma vettoriale di una retta per l'origine

La retta r contenente l'origine O e avente vettore di direzione $V \neq 0$ ha equazione parametrica

$$P = Vt$$

dove P indica un punto qualsiasi del piano e t un parametro reale.

Equazione parametrica in forma vettoriale di una retta per l'origine



Un punto P qualsiasi di r si ottiene moltiplicando il vettore V per un opportuno $t \in \mathbb{R}$.

Equazioni parametriche di rette per l'origine, rispetto alle coordinate

Posto $P = (x, y)$ e $V = (v_1, v_2)$ l'equazione vettoriale $P = Vt$ assume la forma:

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t \end{cases}$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Il vettore $V \neq 0$ si chiama vettore di direzione della retta r.

Equazioni parametriche di rette per l'origine, rispetto alle coordinate

Esempi

1. La retta contenete l'origine e avente vettore di direzione $V = (3, -1)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = & 3t \\ y = & -t \end{cases}$$

   $t \in \mathbb{R}$.

2. L'asse x e l'asse y hanno equazioni parametriche:

$$\text{asse } x\colon \begin{cases} x = & t \\ y = & 0 \end{cases} \qquad \text{asse } y\colon \begin{cases} x = & 0 \\ y = & t \end{cases}$$

   $t \in \mathbb{R}$.

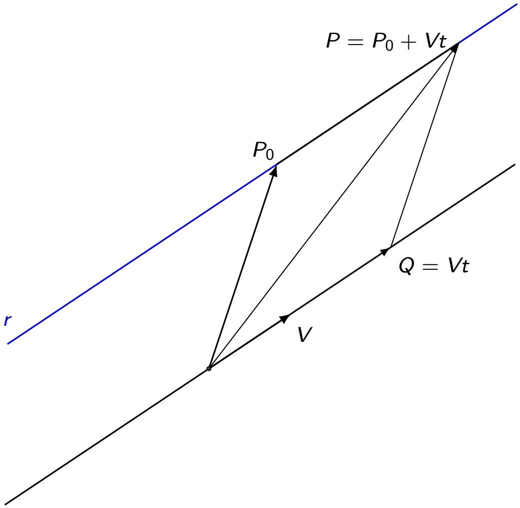
Equazione parametrica vettoriale di una retta del piano

La retta r del piano contenente il punto P_0 e avente vettore di direzione $V \neq 0$ ha equazione parametrica

$$P = P_0 + Vt$$

dove P indica un punto qualsiasi del piano e t un parametro reale.

Equazione parametrica vettoriale di una retta del piano



Qualsiasi punto P della retta r si ottiene sommando il vettore P_0 con il vettore $Q = Vt$ ($t \in \mathbb{R}$).

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

Supposto $v_1 \neq 0$ (V è diverso da 0 perché vettore di direzione), dalle equazioni parametriche di r si ottiene $t = \dfrac{x - x_0}{v_1}$ e

$$y = y_0 + v_2 \frac{(x - x_0)}{v_1}$$

$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$$

$$v_2 x - v_1 y - v_2 x_0 - v_1 y_0 = 0$$

Posto $a = v_2$, $b = -v_1$ e $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$ si ottiene:

$$ax + by + c = 0$$

detta equazione cartesiana di r.

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

Osservazione

L'equazione $v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$, ossia

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

costituisce l'equazione cartesiana di una generica retta del piano contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Interpretazione geometrica dei coefficienti a, b

Essendo $a = v_2$ e $b = -v_1$ è immediato verificare che il vettore (a, b) (diverso da zero) è ortogonale alla retta r, infatti

$$(a, b) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

Equazioni parametriche e equazioni cartesiane di rette

In particolare, se $b \neq 0$ ($v_1 \neq 0$) l'equazione cartesiana della retta può essere scritta nella forma

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Posto $m = -\frac{a}{b} = \frac{v_2}{v_1}$ e $q = -\frac{c}{b}$, si ottiene:

$$y = mx + q$$

Riassumendo

- Se nel piano si fissa un sistema di riferimento (un punto, detto origine e due vettori ortogonali e unitari) è possibile identificare il punto con una coppia ordinata di numeri reali.

- una retta del piano si può rappresentare mediante equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

o equazioni cartesiane:

$$ax + by + c = 0$$

In particolare, se $b \neq 0$:

$$y = mx + q$$

Condizione di parallelismo tra rette

Siano r e s due rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = x'_0 + v'_1 u \\ y = y'_0 + v'_2 u \end{cases}$$

dove $t, u \in \mathbb{R}$. Allora

$$r \text{ è parallela a } s \; (r \parallel s) \quad \Longleftrightarrow \quad (v_1, v_2) = k(v'_1, v'_2), \quad k \neq 0$$

Condizione di ortogonalità tra rette

Siano r e s due rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = x'_0 + v'_1 u \\ y = y'_0 + v'_2 u \end{cases}$$

dove $t, u \in \mathbb{R}$. Allora

$$r \text{ è ortogonale a } s \ (r \perp s) \iff (v_1, v_2) \cdot (v'_1, v'_2) = 0$$

Esercizio

Trovare la condizione di ortogonalità di due rette r e s aventi equazioni cartesiane

(a) $r: \quad ax + by + c = 0, \qquad s: \quad a'x + b'y + c' = 0.$

(b) $r: \quad y = mx + q, \qquad s: \quad y = m'x + q'.$