LEZIONE 3

Geometria della retta nel piano
Sintesi

Sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano.

Fissare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano significa scegliere

1. un punto origine O;
2. una coppia di vettori E_1, E_2, spiccati da O, ortogonali e di lunghezza unitaria.

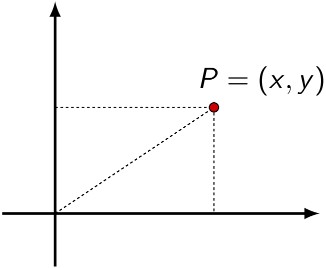
Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il piano si può "identificare" con $\mathbb{R}^2$.

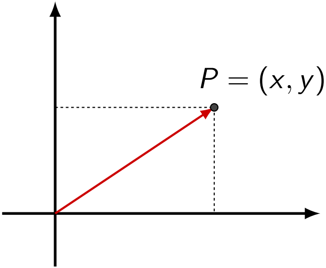
Interpretazione geometrica di (x, y)

In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la coppia ordinata di numeri reali (x, y) ha due importanti interpretazioni geometriche:

- il punto
- il vettore spiccato dall'origine

L'interpretazione più corretta è suggerita dal contesto.





Somma di due vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione

Siano $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* k *un numero reale.*

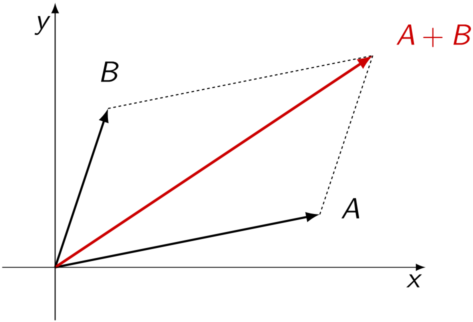
- *Si chiama somma di* A *e* B *il vettore*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

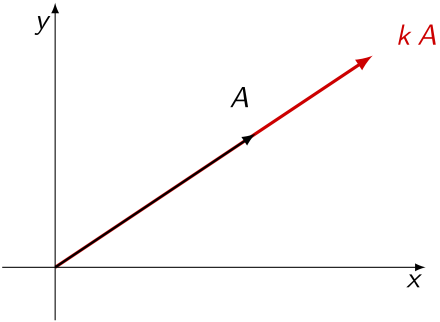
- *Si chiama moltiplicazione del vettore* A *per il numero* k *il vettore*

$$kA = (ka_1, ka_2)$$

Il vettore somma $A + B$ è quello che si ottiene con la "regola del parellelogramma".



Moltiplicare un vettore A per uno scalare k significa "dilatare" ("contrarre ") del fattore k, il vettore A.



Lunghezza di un vettore. Distanza tra due punti

1. La lunghezza di $A = (a_1, a_2)$ è il numero

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

2. La distanza di $A = (a_1, a_2)$ da $B = (b_1, b_2)$ è il numero

$$|B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Punto medio

Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ allora il punto medio del segmento $\overline{AB}$ è

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Posto $M = (m_1, m_2)$ si ottiene:

$$\begin{cases} m_1 = & \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ \\ m_2 = & \dfrac{a_2 + b_2}{2} \end{cases}$$

Prodotto scalare. Vettori ortogonali

Il prodotto scalare di A e B è il numero

$$A \cdot B = |A|\,|B| \cos\theta$$

dove $\cos\theta$ è l'angolo (convesso) formato da A e B.

Due vettori $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ si dicono ortogonali se

$$A \cdot B = 0$$

Proprietà del prodotto scalare

1. Il prodotto scalare è simmetrico
$$A \cdot B = B \cdot A$$
2. Il prodotto scalare è omogeneo
$$(kA) \cdot B = k(A \cdot B)$$
3. Il prodotto scalare è additivo
$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
4. Il prodotto scalare è positivo
$$A \cdot A = |A|^2 > 0 \quad \text{se} A \neq 0$$

Il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali

Teorema

Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ *allora*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Dimostrazione (facoltativa).

Siano $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A \cdot B = & \quad (a_1 E_1 + a_2 E_2) \cdot (b_1 E_1 + b_2 E_2) \\ = & \quad a_1 b_1 \underbrace{(E_1 \cdot E_1)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(E_1 \cdot E_2)}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{(E_2 \cdot E_1)}_{=0} + a_2 b_2 \underbrace{(E_2 \cdot E_2)}_{=1} \\ = & \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad Q.E.D. \end{aligned}$$

Proiezione di un vettore lungo un altro

Definizione

Siano $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$ *(*$B \neq 0$*). Si chiama proiezione di A lungo (la retta di) B il vettore*

$$P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\, B$$

In particolare se $|U| = 1$

$$P_U(A) = (A \cdot U)\, B$$

Equazioni parametriche di rette

Equazione parametrica della retta r contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e avente vettore di direzione $V = (v_1, v_2)$

$$P = P_0 + Vt$$

Posto $P = (x, y)$, l'equazione assume la forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

Supposto $v_1 \neq 0$ (V è diverso da 0 perché vettore di direzione), dalle equazioni parametriche di r si ottiene $t = \dfrac{x - x_0}{v_1}$ e

$$y = y_0 + v_2 \frac{(x - x_0)}{v_1}$$

$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$$

$$v_2 x - v_1 y \; - v_2 x_0 - v_1 y_0 = 0$$

Posto $a = v_2$, $b = -v_1$ e $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$ si ottiene:

$$ax + by + c = 0$$

detta equazione cartesiana di r.

Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

Osservazione

L'equazione $v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$, ossia

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

costituisce l'equazione cartesiana di una generica retta del piano contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Interpretazione geometrica dei coefficienti a, b

Essendo $a = v_2$ e $b = -v_1$ è immediato verificare che il vettore (a, b) (diverso da zero) è ortogonale alla retta r, infatti

$$(a, b) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

Equazioni parametriche e equazioni cartesiane di rette

In particolare, se $b \neq 0$ ($v_1 \neq 0$) l'equazione cartesiana della retta può essere scritta nella forma

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Posto $m = -\frac{a}{b} = \frac{v_2}{v_1}$ e $q = -\frac{c}{b}$, si ottiene:

$$y = m\,x + q$$

Riassumendo

- Se nel piano si fissa un sistema di riferimento (un punto, detto origine e due vettori ortogonali e unitari) è possibile identificare il punto con una coppia ordinata di numeri reali.

- una retta del piano si può rappresentare mediante equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

o equazioni cartesiane:

$$ax + by + c = 0$$

In particolare, se $b \neq 0$:

$$y = mx + q$$

Condizione di parallelismo tra rette

Siano r e s due rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = x_0' + v_1' u \\ y = y_0' + v_2' u \end{cases}$$

dove $t, u \in \mathbb{R}$. Allora

$$r \text{ è parallela a } s \ (r \parallel s) \iff (v_1, v_2) = k(v_1', v_2'), \quad k \neq 0$$