Un esercizio di combinatoria enumerativa.

Quesito 1.

Durante una gita scolastica una classe di 27 studenti raggiunge l'albergo per il pernottamento. Sono state loro assegnate 7 stanze, diciamo A, B, C, D, E, F, G; la stanza A ha 3 letti, le restanti 4. In quanti modi il docente accompagnatore può disporre gli studenti nelle stanze?

Soluzione

Denominiamo gli studenti con un numero, da 1 a 27.

Prima soluzione. Un modo per effettuare l'assegnazione è il seguente:

- Scegliamo i tre studenti che andranno a occupare la stanza A. La scelta si può fare in $\binom{27}{3}$ modi.
- Scegliamo quattro studenti, tra i 24 rimasti, che andranno a occupare la stanza B. La scelta si può fare in $\binom{24}{4}$ modi.
- Scegliamo quattro studenti, tra i 20 rimasti, che andranno a occupare la stanza C. La scelta si può fare in $\binom{20}{4}$ modi.
- Scegliamo quattro studenti, tra i 16 rimasti, che andranno a occupare la stanza D. La scelta si può fare in $\binom{16}{4}$ modi.
- Scegliamo quattro studenti, tra i 12 rimasti, che andranno a occupare la stanza E. La scelta si può fare in $\binom{12}{4}$ modi.
- Scegliamo quattro studenti, tra gli 8 rimasti, che andranno a occupare la stanza F. La scelta si può fare in $\binom{8}{4}$ modi.
- Restano infine 4 studenti che andranno a occupare l'ultima stanza, quella denominata con G. Ovviamente vi è un'unica scelta possibile.

Pertanto i 27 studenti possono essere distribuiti nelle 7 stanze in

$$\binom{27}{3} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$$

modi diversi.

Il quesito si può generalizzare così:

Contare in quanti modi si possono suddividere n oggetti distinti in k gruppi, che contengono rispettivamente $n_1, n_2, \dots n_k$ oggetti. Non conta nè l'ordine degli studenti all'interno di ciascun gruppo, nè l'ordine in cui si considerano i gruppi.

Parafrasando il procedimento esposto sopra si ottiene

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \tag{0.1}$$

Facendo i conti (e semplificando le frazioni) è facile verificare che (0.1) non è altro che il coefficiente multinomiale $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$, ossia

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{0.2}$$

Seconda soluzione.

La soluzione del caso generale suggerisce una interpretazione del problema in termini di permutazioni. A è la stanza con 3 letti, e B, C, D, E, F, G le 6 stanze con 4 letti ciascuna; gli studenti sono numerati da 1 a 27, come prima. Allora c'è una ovvia corrispondenza biunivoca tra le soluzioni del problema e le parole (permutazioni) di lunghezza 27 nell'alfabeto A, B, C, D, E, F, G, dove A è ripetuta 3 volte, e ciscuna delle lettere B, C, D, E, F, G è ripetuta 4 volte. Le permutazioni sono $\binom{27}{3,4,4,4,4,4,4} = \frac{27!}{3!4!4!4!4!4!4!}$. Si ottiene: $\frac{27!}{3!4!4!4!4!4!4!}$

Terza soluzione.

Si può dare anche una interpretazione in termini di funzioni da $[27]$ a $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, in cui la fibra al di sopra dell'elemento A ha cardinalità 3, mentre tutte le altre fibre su B, C, D, E, F, G hanno cardinalità 4. Ancora una volta si ottiene: $\frac{27!}{3!4!4!4!4!4!4!}$.

Una versione modificata del quesito potrebbe essere la seguente

Quesito 1. Versione modificata.

Durante una gita scolastica una classe di 27 studenti raggiunge l'albergo per il pernottamento. Sono state loro assegnate 7 stanze, diciamo A, B, C, D, E, F, G; ognuna delle quali ha 4 letti. In quanti modi il docente accompagnatore può disporre gli studenti nelle stanze?

Come nella formulazione precedente, una stanza dovrà contenere tre studenti e tutte le altre quattro. Tuttavia, in questo caso, il docente accompagnatore deve scegliere *quale* tra le sette stanze conterrà tre studenti; tale scelta può essere effettuata in 7 modi diversi, tanti quanti il numero di stanze disponibili. In questo caso la risposta è

$$7 \cdot \binom{27}{3} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$$

Altro quesito è il seguente

> **Quesito 2.**
>
> *Durante una gita scolastica una classe di* 27 *studenti raggiunge l'albergo per il pernottamento. Sono state loro assegnate* 7 *stanze, ognuna delle quali ha* 4 *letti. In quanti modi il docente accompagnatore può disporre gli studenti nelle stanze, se queste ultime* non sono distinguibili*?*

Ovviamente una stanza sarà occupata da 3 studenti e le altre sei da 4. Si può ragionare come per il quesito 1:

Un modo per effettuare l'assegnazione è il seguente:

Per la stanza che conterrà solo tre studenti, diciamo la A anche se le stanze non sono distinguibili, ci sono $\displaystyle\binom{27}{3}$ scelte possibili. Per la stanza B ci sono $\displaystyle\binom{24}{4}$ scelte possibili, per la stanza C ci sono $\displaystyle\binom{20}{4}$ scelte possibili, e così via. Quello che otteniamo è ancora $\binom{27}{3} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$.

Ora però dobbiamo tener conto che le stanze *non* sono distinguibili. Poichè ci sono 6 stanze con la stessa cardinalità (pari a 4) dobbiamo dividere per 6!. Quindi la risposta al quesito 2 è

$$\frac{1}{6!} \cdot \binom{27}{3} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$$