

Combinatoria, probabilità e matematica discreta

Quesiti proposti all'esame di stato

(A cura di) Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Maggio 2019¹

1 Esercizi

Esercizio 1.1 (Sessione ordinaria, 2001). *Dimostrare che si ha*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

Esercizio 1.2 (Sessione ordinaria, 2002). *Se a, b sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? Perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n ?*

Esercizio 1.3 (Sessione ordinaria, 2002). *Si consideri la seguente proposizione: “La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica”. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.*

Esercizio 1.4 (PNI, 2002). *Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610-1675), amico di Blaise Pascal: “Giocando a dadi, è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”*

Esercizio 1.5 (Sessione ordinaria, 2003). *Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?*

Esercizio 1.6 (PNI, 2003). *Tre scatole A, B, C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?*

R

¹File tex: esercizi.maturita.combinatoria.tex

Esercizio 1.7 (Sessione ordinaria, 2004). *Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quante sono le applicazioni (funzioni) da A in B ?*

Esercizio 1.8 (Sessione ordinaria, 2005). *Come si definisce $n!$ e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?*

Esercizio 1.9 (PNI, 2005). *Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?*

Esercizio 1.10 (PNI, 2005). *Il 40 % della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.*

Esercizio 1.11 (PNI, 2006). *Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64-esima casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.*

Esercizio 1.12 (PNI, 2006). *Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Esercizio 1.13 (Sessione ordinaria, 2007). *Si risolva l'equazione*

$$4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$$

Esercizio 1.14 (PNI, 2007). *Si scelga a caso un punto in un triangolo equilatero di lato 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.*

Esercizio 1.15 (PNI, 2007). *A Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: "Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare."*

Esercizio 1.16 (Sessione ordinaria, 2008). Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, con $n > 3$, sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

Esercizio 1.17 (PNI, 2008). Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

Esercizio 1.18 (PNI, 2008). In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Esercizio 1.19 (Sessione ordinaria, 2009). Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

Esercizio 1.20 (PNI, 2009). Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).

Esercizio 1.21 (PNI, 2009). Si dimostri l'identità :

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

con n, k naturali e $n > k$.

Esercizio 1.22 (Sessione ordinaria, 2010). Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

Esercizio 1.23. (Esame 2010 PNI) Per la ricorrenza della festa della mamma, la signora Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La signora Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la signora Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della signora Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.

Esercizio 1.24 (PNI, 2010). Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .

Esercizio 1.25 (Sessione ordinaria, 2011). *Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?*

Esercizio 1.26 (Sessione ordinaria, 2012). *Siano dati nello spazio n punti P_1, P_2, \dots, P_n . Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?*

Esercizio 1.27 (PNI, 2012). *Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?*

Esercizio 1.28 (PNI, 2012). *Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?*

R

Esercizio 1.29 (PNI, 2013). *In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?*

R

Esercizio 1.30 (Sessione ordinaria, 2015). *Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?*

R

Esercizio 1.31 (Sessione ordinaria, 2016). *Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?*

Esercizio 1.32 (Sessione ordinaria, 2018). *Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:*

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

- (a) *Quale sarà il valore medio dei numeri generati?*
- (b) *Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?*
- (c) *Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?*

R

Esercizio 1.33 (Sessione ordinaria, 2018). *Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?*

R

Esercizio 1.34 (Simulazione MIUR, 20 dicembre 2018). *Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motivare la risposta.*

R

Esercizio 1.35 (Simulazione MIUR, 28 febbraio 2019). *Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.*

- (a) *Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?*
- (b) *Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?*

R

Esercizio 1.36 (Simulazione MIUR, 2 aprile 2019). *Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.*

- (a) *Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?*
- (b) *Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?*

R

2 Soluzioni

Esercizio 1.6

Primo metodo (cenni).

A (B , C) indica l'evento "è stata scelta la scatola A (B , C)" mentre D è l'evento "è stata scelta una lampadina difettosa". Dai dati del problema si ha

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{100}$$

$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{20}{100}$$

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{10}{100}$$

La probabilità $P(A)$ che venga scelta la scatola A è $\frac{1}{3}$, lo stesso per le altre

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

La probabilità che dopo aver scelto una scatola a caso venga estratta una lampada difettosa è

$$\begin{aligned} P &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(D|A) P(A) + P(D|B) P(B) + P(D|C) P(C) \\ &= \frac{5}{100} \frac{1}{3} + \frac{20}{100} \frac{1}{3} + \frac{10}{100} \frac{1}{3} \\ &\approx 12\% \end{aligned}$$

Secondo metodo.

Il problema si può schematizzare con un diagramma ad albero (disegno e soluzione sono lasciati per esercizio).

Esercizio 1.28

I dati del quesito sono schematizzati in questo diagramma a albero

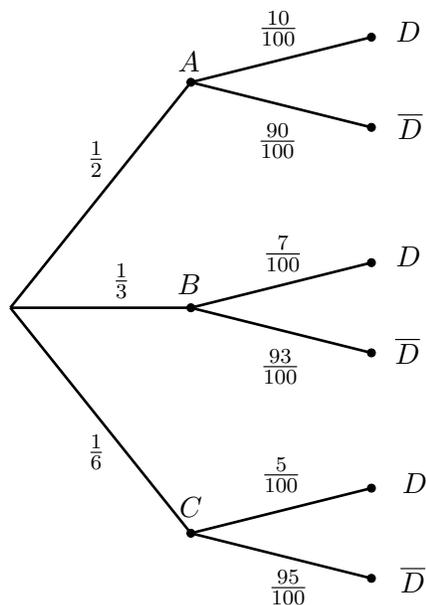


Figura 1

Per determinare la probabilità che un pezzo difettoso provenga dallo stabilimento A bisogna utilizzare il teorema di Bayes

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{30}{49} = 0.612 = 61.2\%$$

Esercizio 1.29 *Primo metodo.*

Delle dieci persone, sei hanno gli occhi azzurri e quattro no. I casi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di 2 elementi che si possono formare da un insieme di 10, cioè $\binom{10}{2}$ mentre i casi favorevoli sono tanti quanti i sottoinsiemi di 2 elementi che si possono formare da un insieme di 4. La probabilità richiesta è (casi favorevoli diviso casi possibili)

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Secondo metodo.

Con il seguente diagramma a albero

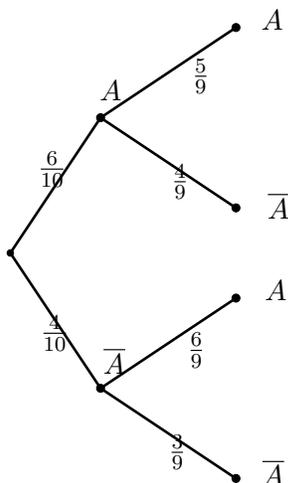


Figura 2

dove A indica l'evento "persona con occhi azzurri" e \bar{A} "persona con occhi NON azzurri".
La probabilità richiesta è

$$p = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Esercizio 1.30

Se si lancia un moneta n volte, la probabilità che esca k volte testa è

$$p(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

dove p indica la probabilità che esca testa e q la probabilità che esca croce ($p + q = 1$).

Per $n = 6$ e nel caso di una moneta è simmetrica $p = q = \frac{1}{2}$

$$p(6, k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}$$

Allora la probabilità che esca " al più " due volte testa è

$$\begin{aligned} p(6, 0) + p(6, 1) + p(6, 2) &= \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} \\ &= \frac{22}{64} \\ &\sim 0.344 \\ &= 34.4\% \end{aligned}$$

La probabilità che esca “ almeno ” due volte testa è

$$\begin{aligned}
 1 - p(6,0) - p(6,1) &= 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
 &= 1 - \frac{1}{64} + \frac{6}{64} \\
 &= \frac{57}{64} \\
 &\sim 0.891 \\
 &= 89.1\%
 \end{aligned}$$

Esercizio 1.32

(a) Valore medio dei numeri generati:

$$\int_0^2 xf(x) dx = \int_0^2 x \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \frac{6}{5}$$

(b) Probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$:

zero, perchè x è una variabile aleatoria continua $\left(\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x) dx = 0 \right)$.

(c) Probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \right) dx = \frac{5}{16}$$

Esercizio 1.33 Sia $p(4) = p$ la probabilità che esca il numero 4. Allora la probabilità che esca il numero 3 è $p(3) = 2p$, la probabilità che esca 2 è $p(2) = 4p$, la probabilità che esca 1 è $p(1) = 8p$. Inoltre la somma di tutte le probabilità deve essere uguale a 1: $p + 2p + 4p + 8p = 1$, ossia $p = \frac{1}{15}$. In definitiva:

$$p(1) = \frac{8}{15}, \quad p(2) = \frac{4}{15}, \quad p(3) = \frac{2}{15}, \quad p(4) = \frac{1}{15}$$

Quindi la probabilità che escano due numeri uguali è

$$p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 + p(4)^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} = 0.378 = 37.8\%$$

Esercizio 1.34

In due lanci gli eventi possibili sono $(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)$. Gli eventi in cui si ottiene esattamente una volta testa (e di conseguenza una volta croce) sono $(T, C), (C, T)$. Quindi la probabilità richiesta è

$$p = \frac{\text{Numero eventi favorevoli}}{\text{Numero eventi possibili}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Se si lancia n volte una moneta simmetrica e si ottiene k volte testa, gli eventi favorevoli sono rappresentati dalle successioni finite di n simboli con esattamente k testa e $n - k$ croce, in tutto sono $\binom{n}{k}$; la probabilità che si verifichi uno qualunque di questi eventi è $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$. Pertanto la probabilità che in n lanci si ottenga k volte testa è

$$p = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Ponendo $n = 4$ e $k = 2$ si ottiene

$$p = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Quindi lanciando 4 volte una moneta (simmetrica) la probabilità di ottenere 2 volte testa (e 2 volte croce) NON è del 50%.

Esercizio 1.35

- (a) La probabilità che il primo numero estratto sia 10 è $p_1 = \frac{1}{16}$; la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 10 è $p_2 = \frac{9}{16}$; infine la probabilità che il terzo numero estratto sia anche esso minore di 10 è $p_3 = \frac{9}{16}$. Pertanto la probabilità richiesta è

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \sim 0.0198 = 1.98\%$$

- (b) Gli eventi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di 5 elementi presi da un insieme di 16, cioè $\binom{16}{5}$. Gli eventi favorevoli sono tanti quanti i sottoinsiemi di 4 elementi presi da un insieme di 12 elementi cioè $\binom{12}{4}$. La probabilità richiesta è

$$p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{495}{4368} \sim 0.113 = 11.3\%$$

Esercizio 1.36

- (a) Affinchè dopo quattro lanci il punteggio sia zero occorre che sia uscito il numero 3 esattamente una volta. Quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \sim 0.386 = 38.6\%$$

(b) Innanzi tutto conviene calcolare la probabilità che *il punteggio scenda almeno una volta sotto lo 0*; ciò succede se

- al primo lancio non esce il numero 3: la probabilità è $\frac{5}{6}$

oppure se

- al primo lancio esce il numero 3 e nei quattro lanci successivi (secondo, terzo, quarto e quinto lancio) esce sempre un numero diverso da 3: la probabilità è $\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Quindi la probabilità che *il punteggio scenda almeno una volta sotto lo 0* è

$$p = \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Quindi la probabilità richiesta è

$$1 - p = 1 - \frac{7105}{7776} \sim 0.086 = 8.6\%$$