Note di probabilità

Mauro Saita

Versione provvisoria, maggio 2020.

Indice

[1]

[1]Per segnalare refusi o errori scrivete per favore a: maurosaita@tiscalinet.it Nome file .tex: 'probabilita.tex'

1 Note di probabilità.

1.1 Eventi elementari. Spazio degli eventi.

Un *esperimento aleatorio* è un esperimento che a priori può avere diversi esiti possibili, mentre un *evento elementare* è uno dei possibili esiti di un esperimento aleatorio.

Definizione 1.1 (Spazio degli eventi)**.** *Si chiama* spazio degli eventi *(e si denota con* Ω*) l'insieme di tutti gli eventi elementari.*

Esempio.

a) Lancio di un dado: gli eventi elementari sono i numeri interi compresi tra 1 e 6

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) Lancio di una moneta: gli eventi elementari sono T (Testa) e C (Croce)

$$\Omega = \{T, C\}$$

Nel caso di due monete si ha

$$\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$$

c) Durata (in ore) di una lampadina: lo spazio degli eventi è formato dagli interi non negativi

$$\Omega = \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Definizione 1.2 (Evento)**.** *Si chiama* evento di Ω *un qualunque sottoinsieme di* Ω*. La totalità degli eventi possibili è rappresentata dall'insieme delle parti* $\mathcal{P}(\Omega)$ *di* Ω*.*

Ω può essere *discreto* (se è costituito da un numero finito o un'infinità numerabile di eventi elementari) oppure *continuo* (se è costituito da tutti i numeri reali di un certo intervallo).

Impostazione insiemistica del calcolo delle probabilità .

Le definizioni sopra enunciate permettono di *rappresesentare un qualunque sistema di eventi mediante un insieme.* La corrispondenza 'eventi - insiemi' consente di tradurre le relazioni logiche su eventi in operazioni sugli insiemi secondo uno schema parzialmente riportato nella seguente tabella

Linguaggio degli eventi	**Linguaggio degli insiemi**
'evento certo'	Ω = spazio degli eventi
'evento impossibile'	$\emptyset$ = insieme vuoto
'si verifica l'evento A'	Insieme A
'non si verifica l'evento A'	Insieme $\overline{A}$
'gli eventi A e B sono incompatibili'	$A \cap B = \emptyset$
'si verifica l'evento A o l'evento B'(o entrambi)	$A \cup B$
'si verifica l'evento A e l'evento B'	$A \cap B$
'si verifica l'evento A e non si verifica l'evento B'	$A \setminus B$

1.2 Definizione assiomatica di probabilità.

Definizione 1.3. *Sia* Ω *uno spazio degli eventi finito. Si chiama* funzione probabilità *su* Ω *una qualsiasi funzione*

$$\mathcal{P}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

con le seguenti proprietà:

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Se* A *e* B *sono due sottoinsiemi* disgiunti *di* Ω *(cioè* $A, B \subseteq \Omega$ *e* $A \cap B = \emptyset$*) allora:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dai due assiomi che caratterizzano una qualunque funzione probabilità si ricavano le seguenti proprietà

Proposizione 1.4. *Se* $\mathcal{P}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathbb{R}_{\geq 0}$ *è una funzione probabilità su* Ω *allora valgono le seguenti uguaglianze*

$$\begin{aligned} &1. \quad P(\emptyset) = 0 \\ &2. \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \\ &3. \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \end{aligned}$$

Dimostrazione. (Cenni.)

1. $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ e quindi, $P(\emptyset) = 0$.
2. Sia A un evento qualunque. Allora $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
3. $P(A) \geq 0$ (si veda la definizione (1.3) di probabilità); inoltre, $\overline{A}$ è anch'esso un evento, e quindi $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$. ∎

Proposizione 1.5. *Siano* A *e* B *due eventi di* Ω*.*

$$\text{Se } B \subseteq A \text{ allora } P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

Dimostrazione. (Cenni).

$P(A) = P\Big((A \setminus B) \cup B\Big) = P(A \setminus B) + P(B)$ ∎

Proposizione 1.6. *Siano A e B due eventi di Ω. Allora*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dimostrazione. (Cenni).
$P(A \cup B) = P\Big((A \setminus (A \cap B)) \cup B\Big) = P\Big(A \setminus (A \cap B)\Big) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$. ■

Nella risoluzione di problemi di natura probabilistica il punto cruciale consiste nel saper determinare correttamente la funzione $\mathcal{P}(\Omega) \xrightarrow{P} [0,1]$; la coppia (Ω, P) si chiama *spazio di probabilità*.

Casi semplici ma allo stesso tempo significativi di spazi di probabilità sono quelli associati a uno spazio Ω degli eventi formato da un numero $\boxed{\text{finito}}$ di eventi elementari, tutti $\boxed{\text{equiprobabili}}$. In questo caso, se $E_1, E_2, \ldots E_n$ sono gli n eventi elementari di Ω e p è la probabilità di ogni evento elementare (cioè $P(E_i) = p$ per ogni i da 1 a n) si ha:

$$1 = P(\Omega) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = np$$

ossia $p = \dfrac{1}{n}$. Pertanto, la probabilità che si verifichi l'evento $A = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$, $0 \leq k \leq n$ è

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k\right) \\ &= P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right) \ldots P\left(E_k\right) \\ &= \frac{k}{n} \end{aligned}$$

dove k indica il numero di eventi favorevoli e n il numero di eventi possibili. Si ricordi che la definizione di probabilità data ora

$$P(A) = \frac{\text{Numero di eventi favorevoli}}{\text{Numero di eventi possibili}} = \frac{k}{n}$$

è applicabile *solo* a quegli esperimenti aleatori contraddistinti da uno spazio degli eventi *finito* da una simmetria che induce ad assegnare la *stessa probabilità* a ciascun evento elementare. In queste note ci si limita a studiare questo caso.

1.3 Probabilità condizionale

Si esamini il seguente

Problema 1.7. *Un'indagine statistica su una popolazione di un milione di individui ha dato i seguenti risultati.*

- *il* 30% *dell'intera popolazione è costituito da fumatori.*

- 28.500 *persone risultano affette dalla patologia A e fra queste* 20.000 *sono fumatori;*

Qual è la probabilità che un fumatore sia affetto dalla patologia A?.

In questo problema lo spazio degli eventi è rappresentato da tutta la popolazione presa in esame (Ω = un milione di persone); si chiede di calcolare la probabilità che si verifichi un certo evento A (essere affetti da una certa patologia) *sotto la condizione* B (essere fumatori). Quindi, per trovare la probabilità che un fumatore sia affetto dalla patologia A occorre annoverare tra 'i casi possibili' tutti e soli gli eventi elementari che formano B. Ciò giustifica la seguente definizione

Definizione 1.8. *Siano A e B due eventi di Ω e $P(B) > 0$. Chiamiamo probabilità che si verifichi l'evento A sotto la condizione B (e lo indichiamo con $P(A|B)$) il numero*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.4 Regola del prodotto. Costruzione di spazi di probabilità

In certi casi è più semplice ricavare la probabilità condizionale $P(A|B)$ direttamente (casi favorevoli su casi possibili) e servirsi di quest'ultima per ricavare $P(A \cap B)$ dall'uguaglianza

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \tag{1.1}$$

La (1.1) non è altro che una riscrittura della definizione di probabilità condizionale, chiamata *regola del prodotto.*

In molti problemi riguardanti il calcolo delle probabilità il punto cruciale consiste nel saper trovare una strategia per determinare correttamente lo spazio di probabilità : opportuni *grafi ad albero* e un uso corretto della *regola del prodotto* permettono spesso di raggiungere lo scopo.

Problema 1.9. *Due urne contengono rispettivamente:*

- *due palline rosse e una nera;*
- *tre palline rosse e due nere.*

Se si sceglie a caso un'urna e poi, da essa si estrae una pallina, qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

Soluzione.

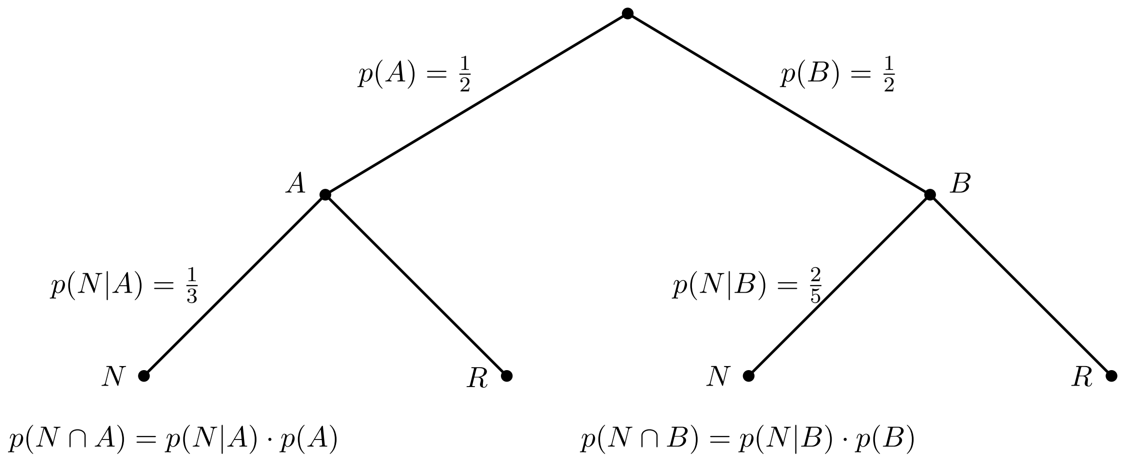

Figura 1

Problema 1.10. *Da un'urna, contenente dieci palline azzurre e dieci palline rosse, si estraggono successivamente due palline (senza reintrodurre la prima pallina estratta nell'urna). Analizzare i vari esiti possibili; in altre parole, calcolare la probabilità che vengano estratte due palline azzurre, la prima pallina azzurra e la seconda rossa, eccetera. Generalizzare il problema nel caso di a palline azzurre e r palline rosse.*

1.5 Eventi indipendenti.

Vogliamo dare una definizione di indipendenza di eventi che sia la traduzione rigorosa della seguente idea intuitiva: gli eventi A e B di Ω, entrambi di probabilità non nulla, sono *indipendenti* se il verificarsi di uno dei due, diciamo B, non influisce sulla probabilità che si verifichi A, cioè $P(A|B) = P(A)$. Per esempio, se lanciamo due volte un dado il risultato del primo lancio non influisce sul risultato del secondo: i due eventi sono indipendenti. Naturalmente, se almeno uno dei due eventi A e B ha probabilità nulla i due eventi si devono poter considerare indipendenti.

Proposizione 1.11. *Siano A e B due eventi di Ω entrambi di probabilità non nulla. Allora le tre seguenti proprietà sono equivalenti*

1. $P(A|B) = P(A)$
2. $P(B|A) = P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Dimostrazione.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Definizione 1.12. *Due eventi A e B di Ω si dicono indipendenti se vale la seguente condizione:*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \tag{1.2}$$

Se $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$ (entrambi gli eventi hanno probabilità non nulla), allora A e B si dicono indipendenti *se soddisfano una delle tre proprietà equivalenti del teorema 1.2.*

Prestiamo attenzione ai seguenti due fatti:

1) Se almeno uno dei due eventi ha probabilità nulla essi sono indipendenti perché la condizione 1.2 è automaticamente verificata.

2) Due eventi disgiunti entrambi di probabilità non nulla, non sono mai indipendenti (attenzione a non confondere la disgiunzione con l'indipendenza!).

Esercizio 1.13. *Nel lancio di un dado si consideri l'evento $A =$'esce un numero pari' e l'evento $B =$'esce un numero maggiore di tre '. A e B sono indipendenti?*

Esercizio 1.14. *Nel lancio di due dadi si considerino i seguenti eventi:*

$A =$*'la somma dei punteggi è dispari'*

$B =$*'sul primo dado esce 1'*

$C =$*'la somma dei punteggi è sette'*

Dire se gli eventi considerati sono a due a due indipendenti.

[**Esercizio 1.13** A e B non sono indipendenti. **Esercizio 1.14** A e B sono indipendenti; A e C non sono indipendenti; B e C sono indipendenti].

1.6 Prove ripetute

Il seguente problema è esplicativo di tutta una categoria di situazioni probabilistiche contraddistinte dal ripetersi più volte di uno stesso esperimento aleatorio (problema delle prove ripetute).

Problema 1.15 (Lancio di una moneta n volte)**.** *Si lancia in aria n volte una moneta asimmetrica. Se la probabilità che esca 'testa' è p, e quella che esca 'croce' è q, $p+q=1$, qual'è la probabilità di ottenere k volte ($0 \leq k \leq n$) 'testa' in n lanci successivi?*

Soluzione. Analizziamo il caso $n = 3$, $k = 2$ e cioè calcoliamo la probabilità che, lanciando tre volte la moneta, esca due volte testa.

Se T indica l'evento 'testa' e C l'evento 'croce' , gli eventi possibili sono tutte le successioni di tre simboli che si possono formare con T o C (e cioè , 2^3); gli eventi favorevoli sono le successioni di tre simboli formati esattamente da due T e una C, in tutto sono $\binom{3}{2}$. Inoltre, poiché i lanci di moneta sono *eventi indipendenti* la probabilità che si verifichi un evento favorevole (formato cioè da due T e una C) è p^2q (regola del prodotto). Quindi, la probabilità cercata è

$$\binom{3}{2}p^2q$$

Per calcolare la probabilità che in n lanci si ottenga k volte testa basta generalizzare, senza alcuna variazione, l'argomentazione appena esposta. Gli eventi favorevoli sono in questo caso le successioni di n simboli con esattamente k testa e $n-k$ croce, in tutto sono $\binom{n}{k}$; la probabilità che si verifichi uno qualunque di essi è p^kq^{n-k}. Pertanto la probabilità cercata è

$$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

1.7 Teorema di Bayes

Teorema 1.16. *Sia A un evento di probabilità non nulla e B_1, B_2 due eventi per i quali valgono le seguenti proprietà*

1. $B_1 \cup B_2 = \Omega$, *dove* Ω *è lo spazio degli eventi*
2. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
3. $P(B_1) \neq 0$ *e* $P(B_1) \neq 0$

Allora

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)}$$

e

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)}$$

Il teorema si generalizza al caso di una famiglia $B_1, B_2, \ldots B_n$ per la quale

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, dove Ω è lo spazio degli eventi;
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$;
3. $P(B_i) \neq 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k) \cdot P(B_k)}$$

1.8 Teorema di Bayes e test diagnostici: un esempio

Si elabora una procedura, un test diagnostico, per verificare se un individuo ha una certa patologia oppure no: se il test dà esito positivo l'individuo è malato, se dà esito negativo l'individuo è sano. Ovviamente il test non è infallibile, ossia può capitare che alcuni degli individui risultati positivi siano sani (falsi positivi) oppure che alcuni degli individui risultati negativi siano in realtà malati (falsi negativi). Per valutare l'efficacia del test si sceglie un campione di individui di cui si conosce preventivamente il numero esatto di persone malate e di quelle sane e poi si controlla la risposta del test diagnostico.

Esercizio 1.17 (Tratto da M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone, Matematica.blu 2.0, Vol 4, pag. α99, n. 165.)**.** *Il test del "palloncino" che indica la presenza di alcol nell'organismo, ha esito positivo per il* 4% *delle persone controllate. L'esperienza ha mostrato che, con questa prova, il* 98% *delle persone con risultato positivo era effettivamente in stato di ebrezza e che il* 98% *delle persone con esito negativo non lo era.*

(a) Qual è la probabilità che l'alcol test dia esito positivo per una persona che non ha bevuto?

(b) Qual è la probabilità che l'alcol test dia esito negativo per una persona che ha bevuto?

Soluzione.

Pos indica che "l'alcol test ha dato esito positivo" mentre $\overline{Pos}$ indica che "l'alcol test ha dato esito negativo". A indica "una persona che ha effettivamente bevuto alcolici" $\overline{A}$ indica "una persona che non ha effettivamente bevuto alcolici.

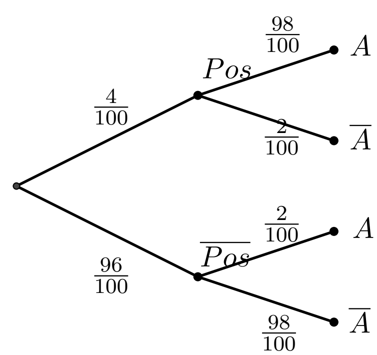

Figura 2

(a) Si tratta di determinare $\mathcal{P}(P|\overline{A})$. Per il teorema di Bayes si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Pos|\overline{A}) &= \frac{\mathcal{P}(Pos)\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|Pos)}{\mathcal{P}(Pos)\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|Pos)+\mathcal{P}(\overline{Pos})\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|\overline{Pos})} \\
&= \frac{\frac{4}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{4}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{96}{100}\cdot\frac{98}{100}} \\
&= \frac{8}{9416} \\
&\sim 0.0008
\end{aligned}$$

(b) Si tratta di determinare $\mathcal{P}(\overline{P}|B)$. Per il teorema di Bayes si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\overline{P}|A) &= \frac{\mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P})}{\mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P}) + \mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P})} \\
&= \frac{\frac{96}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{4}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{96}{100}} \\
&= \frac{192}{584} \\
&\sim 0.33
\end{aligned}$$

1.9 Applicazioni del teorema di Bayes: test clinici e test di collaudo di processi produttivi

[da scrivere]