Note di trigonometria.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, novembre 2013.[1]

Indice

1 Formule di addizione (sottrazione).

Siano $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ due vettori spiccati dall'origine. Il loro prodotto scalare si può scrivere nei seguenti due modi:

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 = |V||W| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra V e W.

Si osservi ora la seguente figura

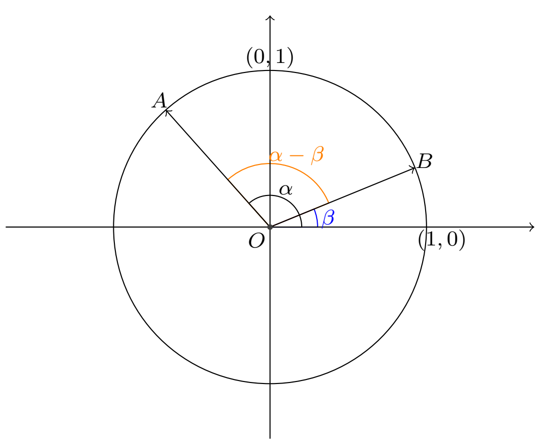

Figura 1

$A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B = (\cos\beta, \sin\beta)$, mentre il prodotto scalare di A per B è

$$A \cdot B = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta \tag{1.1}$$

$$A \cdot B = \cos(\alpha - \beta) \tag{1.2}$$

[1]Nome file: 'trigonometria-02-2013.tex'

Uguagliando i secondi membri di (1.1) e (1.2) si ottengono le *formule di sottrazione del coseno*, ovvero

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta + \sin\alpha \ \sin\beta \tag{1.3}$$

Formule di addizione del coseno. Basta porre nell'uguaglianza 1.3 $\beta = -\gamma$. Si ottiene $\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha \ \cos(-\gamma) + \sin\alpha \ \sin(-\gamma)$ e quindi

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha \ \cos\gamma - \sin\alpha \ \sin\gamma \tag{1.4}$$

Formule di sottrazione del seno Si ottengono ricordando che per ogni angolo θ,

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \quad \text{e} \quad \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \tag{1.5}$$

Ponendo $\alpha - \beta = \theta$ nella prima delle uguaglianze 1.5 si ottiene

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left((\tfrac{\pi}{2} - \alpha) + \beta\right) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) \ \cos\beta - \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) \ \sin\beta \\ &= \sin\alpha \ \cos\beta - \cos\alpha \ \sin\beta \end{aligned} \tag{1.6}$$

Formule di addizione del seno. Basta porre nell'uguaglianza 1.6 $\beta = -\gamma$. Si ottiene $\sin(\alpha - (-\gamma)) = \sin\alpha \ \cos(-\gamma) - \cos\alpha \ \sin(-\gamma)$ e quindi

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin\alpha \ \cos\gamma + \cos\alpha \ \sin\gamma \tag{1.7}$$

2 Eratostene. Il raggio terrestre.

Dall'osservazione delle eclissi totale di luna i Greci per primi dedussero la sfericità della terra. Durante questi eventi la superficie lunare costituisce un gigantesco schermo sul quale si proietta l'ombra della terra che risulta sempre delimitata da contorni curvi ed estrememente regolari. L'assunzione della sfericità del nostro pianeta permise a diversi astronomi greci di detrminarne le dimensioni. Aristotele, rifacendosi probabilmente a calcoli eseguiti da Eudosso, asserì che il perimetro terrestre doveva essere di circa 40.000 miglia mentre alcuni contemporanei di Archimede lo valutarono di 30.000 miglia. Tra tutte le diverse misurazioni la più riuscita e famosa è quella di Eratostene (275 a.C. 195 a.C.). Nel saggio *Sulla misurazione della terra* egli fece le seguenti ipotesi:

1. la verticale in un punto qualsiasi della superficie terrestre è diretta verso il centro della terra;
2. i raggi solari che colpiscono la superficie terrestre provengono da così lontano che si possono considerare tra loro paralleli;
3. Alessandria e Siene (l'attuale Assuan) si trovano sullo stesso meridiano cioè la città di Alessandria si trova esattamente a nord di Siene.

Fatte queste ipotesi, Eratostene osservò che nel solstizio d'estate nella città di Siene i raggi del sole erano perpendicolari rispetto al terreno, mentre a Alessandria essi formavano con la verticale l'angolo $\alpha = 7°12'$. La distanza tra le due città era stata valutata in 785 km.

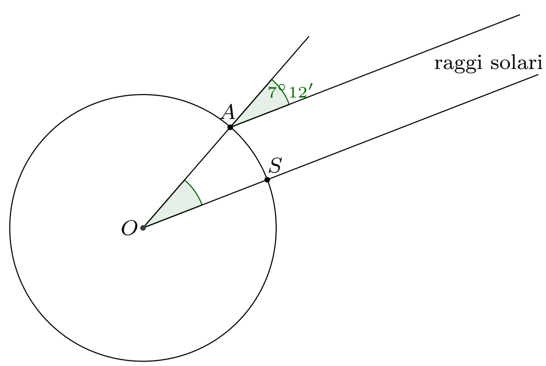

Figura 2

Con riferimento alla figura, si consideri l'intersezione della sfera terrestre con il piano che contiene il centro O della terra, il punto S (Siene) e il punto A (Alessandria). L'angolo $\widehat{SOA}$ e l'angolo che il raggio di sole forma con la verticale alla terra in A sono uguali perchè coppia di angoli corrispondenti formati dalle due rette parallele s_1, s_2 e dalla trasversale OA.

Dalla proporzione

$$\left(7 + \frac{1}{5}\right)^\circ : 360^\circ = 785 : 2\pi R$$

si ricavano la lunghezza della circonferenza e del raggio terrestre. I valori stimati da Eratostene sono

$$2\pi R = 39.250\ km$$

$$R = 6.250\ km$$

I valori oggi conosciuti della circonferenza e del raggio terrestre sono rispettivamente 40.075 km e 6.371 km.

3 Aristarco di Samo. La distanza Terra-Luna.

Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.), astronomo greco, propose più di 1500 anni prima di Copernico il sistema eliocentrico. Nel saggio "*Sulla dimensioni e sulle distanze del Sole e della Luna* (pervenuto fino a noi) egli sostenne che il sole era al centro dell'universo e che la terra ruotava attorno a esso. Spiegò il ciclo delle stagioni con l'inclinazione dell'asse terrestre e calcolò (anche se in modo molto approssimativo) la distanza Terra-Luna. Le sue congetture non vennero accettate dai suoi contemporanei.

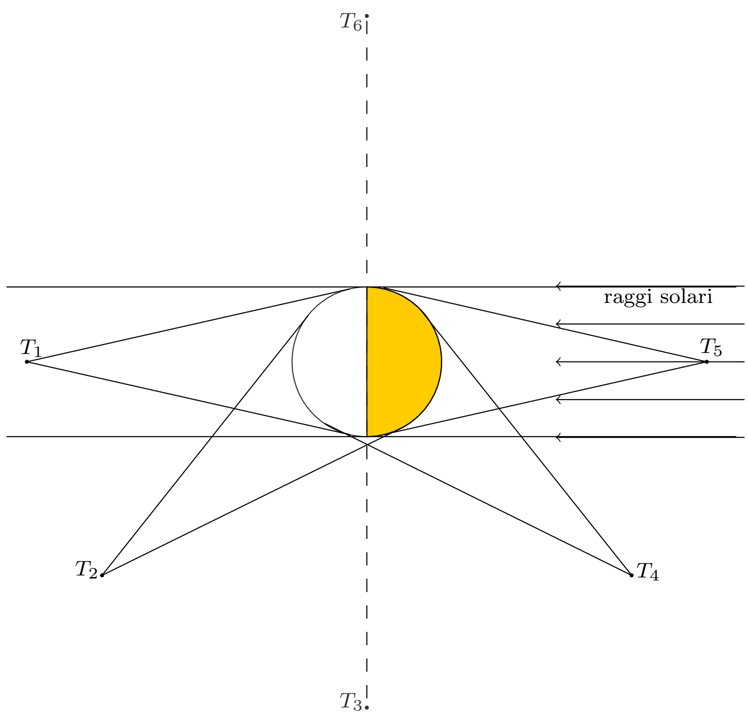

Figura 3

Si osservi la figura 3: quando la terra si trova in posizione T_1, la luna si trova esattamente tra il sole e la terra; essa rivolge a un osservatore terrestre il suo emisfero non illuminato e quindi non appare visibile: è la fase di 'luna nuova' (novilunio). Quando la terra si trova in T_2 un osservatore posto in quella posizione vede solo una piccola parte dell'emisfero lunare illuminato (luna crescente), mentre quando la terra è in T_4 la luna è opposta al sole rispetto alla terra e appare completamente illuminata: è la fase di 'luna piena' (plenilunio).

Se invece terra-luna-sole formano un angolo retto (cioè se la terra è in posizione T_3 o T_6) si dice che la luna è in *quadratura*; allora un osservatore terrestre vedrà esattamente mezza luna. Quando si verifica questa configurazione e sole e luna sono entrambi visibili (all'alba o al tramonto) è possibile misurare l'angolo θ (figura 4). Si ricava

$$\texttt{Distanza terra-luna} = LT = ST\cos\theta$$

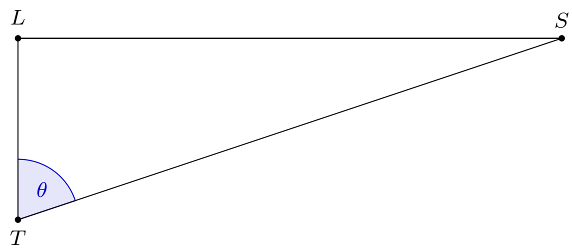

Figura 4

I risultati trovati da Aristarco sono molto imprecisi per due ragioni: la fase di quadratura non è determinabile con precisione per mezzo della sola osservazione e piccoli errori nella valutazione dell'angolo θ (prossimo a 90°) causano notevoli variazioni nel calcolo di $\cos\theta$: