Liceo Scientifico "L. Cremona" **Verifica di matematica. Goniometria. Equazioni**		**Classe:** ______ **Docente: M. Saita**
Cognome:	**Nome:**	

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.[1]

Esercizio 1. Determinare, se esistono, le soluzioni delle seguenti equazioni

1. $10\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 7$
2. $\sin x - \cos(-x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan x = 0$
4. $5\sin(\pi - x) + 4 - 2\cos^2 x = 0$

Esercizio 2. Vero o Falso?

1. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Le uniche soluzioni di $\sin x = \sin 2x$ sono $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\cos^4 x - \sin^4 x = 2$ allora l'equazione non ha soluzioni.
3. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $2\sin^2 x \cos^2 x = 1$ allora $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha: $\dfrac{1}{4}\cos 4x = 1$.
5. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1$

[1] File tex: verifica_02_trigonometria_equazioni_4g_2013.tex

Soluzioni.

1. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

2. $x = \dfrac{5}{12}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \dfrac{13}{12}\pi + 2k\pi$

   Soluzione.

   Primo metodo. (Proposto da Danini)

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{0.1}$$

Elevando al quadrato entrambi i termini dell'equazione si ottiene

$$\begin{aligned}
(\sin x - \cos x)^2 &= \frac{1}{2} \\
\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x &= \frac{1}{2} \\
2\sin x \cos x &= 1 - \frac{1}{2} \\
\sin 2x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si ottiene $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ovvero

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Poichè si è elevato al quadrato bisogna verificare *quali* dei valori trovati sono soluzioni dell'equazione. Sostituendo in (0.1) (con l'aiuto di una calcolatrice) si scopre che
$x = \dfrac{\pi}{12}$ NON è soluzione dell'equazione.
$x = \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13}{12}\pi$ è soluzione dell'equazione.
$x = \dfrac{5}{12}\pi$ è soluzione dell'equazione.
$x = \dfrac{5}{12}\pi + \pi = \dfrac{17}{12}\pi$ NON è soluzione dell'equazione.
Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$$

Secondo metodo. (Proposto da Fumagalli e Ruffini)

Posto $X = \cos x$, $Y = \sin y$ si ottiene

$$\begin{cases} Y - X = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \tag{0.2}$$

Occorre risolvere il sistema (0.2):

$$\begin{cases} Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + (X + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2X^2 + \sqrt{2}X - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4X^2 + 2\sqrt{2}\,X - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \vee \quad X = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Quindi, le soluzioni dell'equazione (0.1) sono

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \qquad \bigvee \qquad \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$$

Terzo metodo. (Proposto dalla maggioranza della classe)

Utilizzando le formule parametriche:

$sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ dove $t = \tan\frac{x}{2}$

l'equazione (0.1) diventa

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

… … …

3. $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$

4. $x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \;\vee\; \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$