Liceo Scientifico LUIGI CREMONA. Milano.

Classe 4E. Docente: Mauro Saita. Materia: matematica. Marzo 2015.

Test sui numeri complessi[1]

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

1. Sia $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$. Scrivere z^{-1} in forma algebrica.

2. Dimostrare che il coniugato del prodotto è uguale al prodotto dei coniugati. In altri termini, dimostrare che $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, per ogni z, w in $\mathbb{C}$.

3. Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio qualsiasi di terzo grado a coefficienti reali. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(x)$ allora anche $\overline{z}$ è radice di $p(x)$.

4. La *Formula di Eulero* è riassunta dalla seguente uguaglianza:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

   Scrivere la dimostrazione proposta dallo stesso Eulero.

5. Dimostrare che la somma delle n radici n-esime dell'unità è uguale a zero.

6. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, la rotazione attorno all'origine di angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

   (a) Di quale funzione si tratta? Scrivere una espressione analitica per $F(z)$.

   (b) Trovare $F(z)$ nel caso in cui $z = 1+i$. Scrivere il risultato in forma trigonometrica.

7. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{C}$ la rotazione piana attorno all'origine di angolo α, con $\alpha \neq 2k\pi$ e $\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ la traslazione di vettore v. Dimostrare che ogni roto-traslazione $T \circ R$ ha esattamente un punto fisso.

8. Dimostrare la *Formula di De Moivre*, ossia

   se $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ è un qualsiasi numero complesso allora la potenza n-esima di z è

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

9. Scrivere in termini precisi l'enunciato del *Teorema fondamentale dell'algebra*.

[1]Nome file: verifica_06_complessi_4e_2015.tex