Equazioni di Maxwell per campi stazionari

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Settembre 2025.

Indice

[1]

[1]Nome file: 'Eq_Maxwell_per_campi_stazionari.tex'

1 Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici stazionari.

Le equazioni di Maxwell[2] per campi elettrici e magnetici che *non variano nel tempo* sono

1. **Teorema di Gauss per il campo elettrico**

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

dove S è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

2. **Conservatività del campo elettrico**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

3. **Teorema di Gauss per il campo magnetico**

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

dove S è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

4. **Teorema di Ampere.**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \, \mu_0 i_c$$

[2] James Clerk Maxwell (Edimburgo, Scozia 1831 - Cambridge, Inghilterra 1879).

2 Prima equazione di Maxwell: teorema di Gauss per il campo elettrico.

Teorema 2.1 (Teorema di Gauss.)**.** *Il flusso del campo elettrico* **E** *attraverso una qualsiasi superficie (orientata) chiusa S è*

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) == \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{2.1}$$

dove Q_{int} è la carica complessiva racchiusa da S.

Il teorema di Gauss e la legge di Coulomb appaiono come due leggi indipendenti dell'elettrostatica. In realtà esse sono equivalenti: si tratta cioè della stessa legge formulata in due modi diversi.

2.1 Dimostrazione del teorema di Gauss nel caso di un campo elettrico generato da una singola carica.

`Caso di un campo elettrico generato da una singola carica.`

Sia q la carica positiva[3] che genera il campo elettrico e S una superficie chiusa.

Primo caso. S racchiude la carica q.

Si scelga una sfera S_1 avente il centro nel punto in cui è posizionata la carica e tutta racchiusa in S. Si suddivida la sfera in tanti piccoli elementi infinitesimi di area dS; ogni dS si può con buona approssimazione considerare una 'piccola' superficie piana.

Il campo elettrico in un punto P della sfera risulta perpendicolare all'elemento d'area dS che contiene il punto, pertanto il flusso di **E** attraverso dS è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \, dS \tag{2.2}$$

Ora, per calcolare il flusso totale attraverso la sfera bisogna sommare tra loro tutti i flussi elementari

$$\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \int E \, dS \tag{2.3}$$

Nella somma (integrale) di (2.3) l'intensità di E è costante perchè tutti i punti sulla superficie della sfera hanno la medesima distanza dalla carica. Quindi

[3] Nel caso la carica fosse negativa la dimostrazione è analoga e lasciata per esercizio.

$$
\begin{aligned}
\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) &= E \int_{S_1} dS \\
&= E\, 4\pi r^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{q}{r^2}\, 4\pi r^2 \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

Infine, essendo S_1 tutta contenuta in S, il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso la superficie S è uguale al flusso di $\mathbf{E}$ attraverso S_1

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Secondo caso. S non racchiude la carica q.

Il flusso "entrante" in S è esattamente uguale al flusso "uscente" da S. Quindi

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

3 Terza equazione di Maxwell: teorema di Gauss per il campo magnetico.

Le linee di un qualsiasi campo magnetico sono linee chiuse. Pertanto, indicata con S una superficie orientata chiusa, le linee di campo magnetico che entrano in S sono pari a quelle che escono; ciò equivale ad affermare che il flusso di campo magnetico relativo alla superficie S è nullo

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \tag{3.1}$$

4 Quarta equazione di Maxwell: la legge di Ampère (1826)

4.1 Circuitazione di campo magnetico

Sia γ una curva chiusa orientata . Con il termine *circuitazione di* $\mathbf{B}$ *lungo* γ si intende il "lavoro" compiuto da $\mathbf{B}$ lungo la curva orientata γ[4].

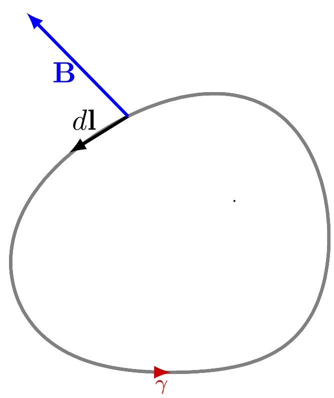

Figura 1: Circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo la linea chiusa γ

Per calcolare la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo γ bisogna prima calcolare il "lavoro" elementare $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ compiuto dal campo magnetico lungo un tratto infinitesimo di curva $d\mathbf{l}$ e poi fare la somma dei lavori elementari relativi a tutti i trattini $d\mathbf{l}$ che costituiscono la curva. Si ottiene

$$\texttt{Circuitazione di } \mathbf{B} \texttt{ lungo } \gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Il simbolo (integrale) "$\oint$ "indica la somma di tutti i lavori elementari, il cerchio sulla S stilizzata di somma sta a indicare che la somma è estesa a una curva chiusa. La circuitazione di campo magnetico ha dimensioni [campo magnetico $*$ lunghezza], quindi si misura in " Tesla per metro": $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}$.

[4]Il termine lavoro è improprio perchè $\mathbf{B}$ non è una forza.

4.2 Campi magnetici generati da circuiti

Se il campo magnetico è stato generato da circuiti percorsi da corrente la legge di Ampère permette di trovare la circuitazione osservando semplicemente come sono disposte le correnti rispetto alla curva orientata γ lungo la quale si calcola la circuitazione. L'importanza del teorema di Ampère nel magnetismo è analogo a quello del teorema di Gauss in elettrostatica; in molti casi infatti, si utilizza la legge di Ampere per calcolare l'intensità del campo magnetico così come in elettrostatica si utilizzava il teorema di Gauss per trovare il campo elettrico. L'enunciato della legge di Ampère è il seguente

Teorema di Ampère.

Sia $\mathbf{B}$ un campo magnetico generato da uno più circuiti percorsi da corrente. La circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una qualunque linea chiusa orientata γ è uguale al prodotto di μ_0 per la somma algebrica delle correnti *concatenate* con γ.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \, \Sigma i \tag{4.1}$$

Se la curva γ non è concatenata con le correnti che generano $\mathbf{B}$ la circuitazione è nulla

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{4.2}$$

Osservazioni.

1. μ_0 indica la costante di permeabilità magnetica del vuoto.Il ruolo di μ_0 è analogo a quello della costante dielettrica ϵ_0 del vuoto: essa dipende dalle proprietà magnetiche del vuoto, come la costante dielettrica dipende dalle proprietà elettriche. Ogni materia ha una sua costante di permeabilità magnetica; i materiali ferromagnetici sono caratterizzati da valori della permeabilità molto alti rispetto a quella del vuoto.

2. Serve, soprattutto in seguito, una definizione rigorosa di *corrente concatenata* con la curva γ. Qui se ne forniscono due equivalenti tra loro.

   PRIMA DEFINIZIONE. Si dice che la curva γ è *concatenata con il filo* se *ogni* superficie S di *bordo* γ interseca il filo; viceversa si dice che γ *non è concatenata con il filo* se esiste una superficie S di *bordo* γ che non interseca il filo.

   SECONDA DEFINIZIONE. Si dice che la curva γ è *concatenata con il filo* se *ogni* deformazione continua che riduce la curva γ a un punto interseca il filo conduttore almeno una volta; viceversa si dice che γ *non è concatenata con il filo* se esiste una deformazione continua che riduce la curva γ a un punto senza mai intersecare il filo.

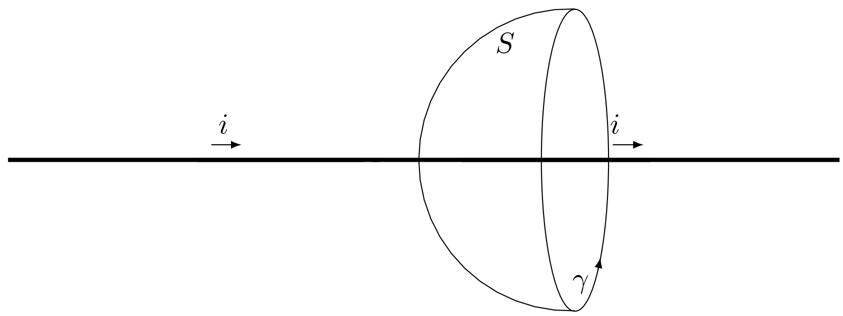

Figura 2: La superficie S avente per bordo γ interseca il filo conduttore. Questo fatto succede *per ogni* superficie di bordo γ. Segue che la corrente è concatenata con il filo.

3. Se la curva γ è concatenata n volte con il filo, la legge di Ampère assume la forma seguente

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n\,\mu_0\,\Sigma i \tag{4.3}$$

   Se la curva non è concatenata con il filo, la costante n è uguale a zero e la circuitazione di $\mathbf{B}$ è nulla. In entrambi i casi la circuitazione non dipende dalla forma della curva γ ma solo dalla corrente concatenata e da quante volte la curva "gira" attorno al filo.

4. La legge di Ampere vale quando nei fili le correnti sono stazionarie, cioè in ogni filo l'intensità di corrente i non varia nel tempo.

4.3 Dimostrazione della legge di Ampère nel caso di un solo filo rettilineo

Se il filo percorso da corrente stazionaria i è rettilineo e infinito il calcolo della circuitazione di $\mathbf{B}$ è relativamente semplice. Si distinguono due casi

Primo caso. Sia γ una curva orientata concatenata con il filo.

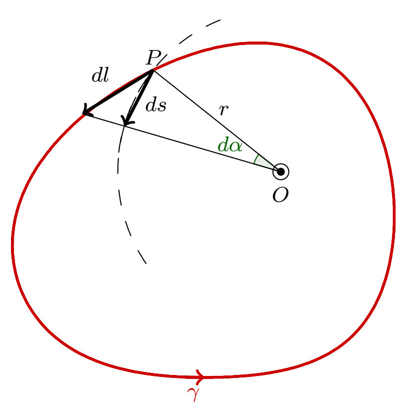

Figura 3: Circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una linea chiusa concatenata con un filo rettilineo perpendicolare al foglio. La corrente è uscente dal foglio.

Si ha

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \, \frac{i}{r} \, \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} \tag{4.4}$$

dove $\mathbf{t}$ rappresenta il versore della tangente in P alla circonferenza di raggio r, orientato secondo il verso concorde con quello della corrente. La quantità $\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}$ rappresenta la lunghezza del tratto elementare di circonferenza $d\mathbf{s}$ (si veda la figura sopra) e quindi $d\alpha = \dfrac{\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}}{r} = \dfrac{ds}{r}$ è l'angolo al centro sotteso dall'elemento $d\mathbf{l}$ di filo. L'uguaglianza (4.4) diventa

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \, i \, d\alpha \tag{4.5}$$

Quindi la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo γ è pari a

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \, i \, d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \, i \oint d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \, i \, 2\pi \\ &= \mu_0 \, i \end{aligned} \tag{4.6}$$

Secondo caso. Sia γ una curva orientata *non* concatenata con il filo.

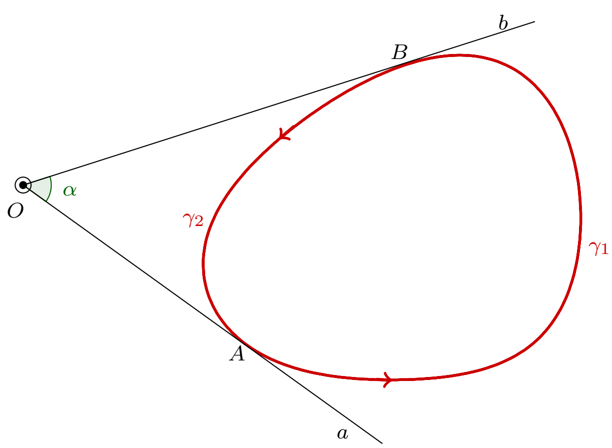

Figura 4: Circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una linea chiusa *non* concatenata con il filo.

Siano A B i punti di contatto delle tangenti a e b a γ passanti per O. La curva orientata risulta formata dalla curva γ_1 che va da A a B e dalla curva γ_2 che va da B a A: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (si veda la figura). Allora la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo γ vale

$$
\begin{aligned}
\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{2\pi}\, i \int d\alpha + \oint_{\gamma_2} \frac{\mu_0}{2\pi}\, i d\alpha \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\, i \, \left[\int_{\gamma_1} d\alpha + \int_{\gamma_2} d\alpha \right] \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\, i \, [\alpha - \alpha] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Si dimostra (non qui) che il risultato trovato vale qualunque sia la forma del filo percorso da corrente.

4.4 Campo magnetico nei punti interni di un solenoide

Per determinare l'intensità del campo magnetico nei punti interni di un solenoide si usa la legge di Ampère. Si scelga la curva γ coincidente con il rettangolo orientato della figura qui sotto, nel quale i lati γ_1, γ_3 sono paralleli all'asse del solenoide e misurano L, mentre γ_2, γ_4 sono gli altri due lati verticali.

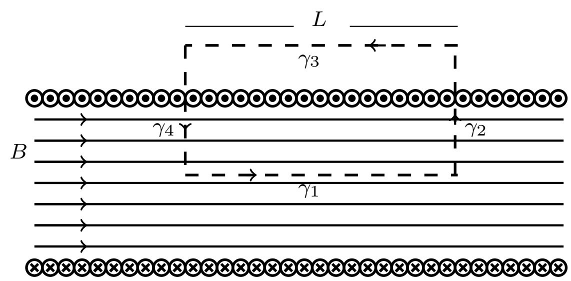

Figura 5: Il campo magnetico all'interno del solenoide è uniforme e ha direzione parallela a quella del suo asse, mentre nei punti esterni è praticamente nullo.

Se il rettangolo è concatenato *una volta* con il solenoide e i è la corrente che attraversa ogni spira, la legge di Ampère assume la forma

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \, N i \tag{4.8}$$

dove N è il numero di spire del solenoide racchiuse dal rettangolo γ.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= B\,L \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pertanto, dalle uguaglianze (4.8) e (4.9)

$$\mathbf{B} = \frac{N}{L} \mu_0 \, i \tag{4.10}$$

dove $\frac{N}{L}$ è il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide.

5 Confronto tra la seconda e la quarta equazione di Maxwell: conservatività del campo elettrico e non conservatività del campo magnetico

Obiettivo di questa sezione è sottolineare che *il campo magnetico* $\mathbf{B}$ *non è conservativo mentre è conservativo il campo elettrico* $\mathbf{E}$. Da ciò segue che per il campo magnetico non è possibile introdurre una funzione "potenziale magnetico" nello stesso modo in cui è stata introdotta per $\mathbf{E}$.

Alcuni richiami sul concetto di coservatività di un campo vettoriale.

- Un campo vettoriale $\mathbf{F}$ si dice *conservativo* se, per ogni curva orientata chiusa risulta

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è *conservativo* e γ_1 è una curva orientata che connette il punto P con il punto Q allora

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

  non dipende dalla curva γ_1 ma solo dai punti P, Q (e ovviamente da $\mathbf{F}$).

  Innanzi tutto si ricordi che se γ è una curva orientata che connette il punto iniziale P con il punto finale Q allora l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ dipende dal verso di percorrenza della curva, ossia

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

  dove $-\gamma$ indica il cammino γ percorso da Q a P.

  Sia, ora γ_2 è una curva orientata, diversa da γ_1, che connette P a Q. Si ottiene

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

  ossia

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

- Dal fatto precedente segue che, scelto arbitrariamente un punto O dello spazio, è possibile definire la funzione

$$\{\texttt{Punti dello spazio}\} \xrightarrow{U_o} \mathbb{R}, \qquad U_o(P) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

  dove γ è un (qualsiasi) cammino orientato che va da O a P.

- Per ogni coppia di punti P, Q dello spazio si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{5.1}$$

  dove γ_1 è un cammino orientato che connette O con P, γ_2 connette P con Q e γ_3 connette Q con O. Da (5.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ & \int_{-\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= U_o(Q) - U_o(P) \end{aligned}$$

- Se $\mathbf{F}$ è conservativo si chiama *potenziale del campo* $\mathbf{F}$ la funzione

$$V_o(P) = -U_o(P)$$

- La funzione potenziale (e ovviamente anche la funzione U_o) è definita a meno di una costante, la quale dipende dalla scelta arbitraria del punto O.

Il caso del campo elettrico.

Il vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ rappresenta la forza agente sull'unità di carica positiva $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{F}}{q}$. Quindi, se γ è una curva orientata che connette il punto iniziale P con il punto finale Q, *l'integrale* $\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ *rappresenta il lavoro compiuto da* $\mathbf{E}$ *per portare l'unità di carica dal punto* P *al punto* Q. Inoltre, *per ogni* curva orientata chiusa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Segue che il campo $\mathbf{E}$ è conservativo (seconda legge di Maxwell).

Il caso del campo magnetico.

Per il campo magnetico (nel caso di correnti stazionarie) vale la legge di Ampère (quarta legge di Maxwell)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \, \Sigma i$$

dove Σi indica la somma algebrica delle correnti concatenate con una qualsiasi curva γ orientata chiusa lungo la quale si calcola la circuitazione.

Quindi, $\mathbf{B}$ non è conservativo perchè la circuitazione di $\mathbf{B}$ non è sempre nulla.