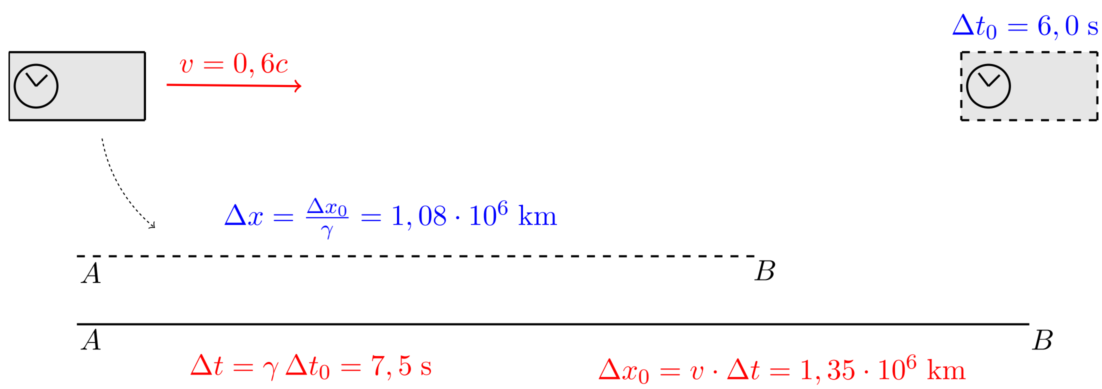
1 Contrazione delle lunghezze, dilatazione dei tempi

Esercizio 1.1. *Una sonda viaggia dalla stazione spaziale A alla stazione B. Il tempo di trasferimento registrato da un orologio solidale con la sonda è di* $6,0$ s*. La velocità della sonda rispetto alle stazioni spaziali è di* $0,6\,c$*. Determinare*

1. *il tempo di trasferimento della sonda rispetto a un orologio solidale con le stazioni spaziali.*
2. *la distanza tra le stazioni spaziali A e B misurate da un osservatore solidale con la sonda.*
3. *la distanza tra le stazioni spaziali A e B misurate da un osservatore solidale con la sonda.*

Soluzione.



L'*osservatore solidale con la sonda* misura, per la durata del viaggio, il tempo $\Delta t_0 = 6,0$ s (tempo proprio) e vede contratta la distanza $\Delta x = \overline{AB}$ che separa le due stazioni spaziali ($\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0 = 1,08 \cdot 10^6$ km).

L'osservatore solidale con le stazioni spaziali misura un intervallo di tempo più lungo, per il viaggio: $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 7,5$ s. Per questo osservatore, la distanza tra le due stazioni spaziali è $\Delta x_0 = v \cdot \Delta t = 1,35 \cdot 10^6$ km.

Esercizio 1.2 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving, es n. 33 pag. 190). *Due stazioni spaziali A e B distano* $4,0 \cdot 10^6$ km*. Quando l'orologio della stazione A segna* $0,0$ s*, un razzo parte verso B alla velocità di* $0,6\,c$*. Determinare*

1. *la durata del viaggio per un osservatore solidale con le stazioni spaziali.*
2. *la durata del viaggio per un osservatore solidale con il razzo.*

Soluzione.

La distanza $4,0 \cdot 10^6$ km indica la *lunghezza propria* che separa le due stazioni spaziali, cioè Δx_0. Quindi il tempo del viaggio, misurato da un sistema di riferimento solidale con le stazioni è

$$\Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{4,0 \cdot 10^9 \text{ m}}{0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 22,2 \text{ s}$$

Il *tempo proprio* del viaggio (misurato rispetto a un sistema di riferimento solidale con il razzo) è

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}\,\Delta t = \sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}} \cdot 22,2 \text{ s} = 17,8 \text{ s}$$

Esercizio 1.3 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving, es n. 34 pag. 191). *Su una mappa, un certo tratto di strada è indicato di lunghezza* $12,5$ *rmkm*

1. *Qual è la sua lunghezza propria?*
2. *Qual è la lunghezza di quel tratto di strada, se viene misurato da un osservatore che viaggia alla velocità di* $0,95\,c$*, parallelamente alla strada?*
3. *Quale deve essere la velocità dell'osservatore affinché il tratto di strada gli appaia lungo* $6,50$ km*?*

Soluzione.

1. La lunghezza propria è *la distanza tra due punti misurata da un osservatore in quiete rispetto a essi.* Quindi, $\Delta x_0 = 12,5$ km.

2. L'osservatore in questione vede il tratto di strada contratto:
$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0 = \sqrt{1 - \frac{(0,95\,c)^2}{c^2}}\, 12,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 3903 \text{ m} \sim 3,9 \text{ km}$$

3. Dall'uguaglianza $\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
6,50 \cdot 10^3 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 12,5 \cdot 10^3 \\
\left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2 &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \\
\frac{v^2}{c^2} &= 1 - \left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2 \\
v &= \sqrt{1 - \left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2}\, c
\end{aligned}$$

Ossia, $v = 0,854\,c$.

Esercizio 1.4 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving, es n. 35 pag. 191). *Una sonda viaggia alla velocità di* $0,8\,c$ *per un tempo di* $3,0$ s *misurato da un orologiosolidale con la sonda stessa*

1. *Quanto dura il viaggio per un orologio sulla Terra?*

2. *Quale distanza percorre la sonda nel sistema di riferimento della Terra?*

Soluzione.

L'esercizio è analogo ai precedenti, gli aspetti concettuali sono gli stessi, quel che cambia è la descrizione dell'ipotetico fenomeno. Dunque, bisogna porsi le stesse domande: qual è il tempo proprio, quale la lunghezza propria?

Il *tempo proprio è il tempo che un orologio misura nel proprio sistema di riposo*; quindi, $\Delta t_0 = 3,0$ s. Questa misura si riferisce a un sistema di riferimento solidale con la sonda, mentre la velocità $v = 0,8\,c$ è relativa a un *altro* sistema di riferimento, solidale con la Terra.

Pertanto, la durata del viaggio per un osservatore sulla Terra è

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} \cdot 3,0\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{s}$$

Infine, la distanza percorsa dalla sonda, secondo un sistema di riferimento terrestre è

$$\Delta x = v\Delta t = 0,8c \cdot 5,0\ \mathrm{s} = 1,2 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$