

# Alcuni esercizi di relatività ristretta

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, gennaio 2019.<sup>1</sup>

## 1 Esercizi

**Esercizio 1.1.** *Un neutrino (una particella elementare) si muove rispetto a un osservatore solidale con la Terra con velocità  $v = c$ . Un altro osservatore, diciamo  $K'$ , si muove con velocità  $w$  verso il neutrino. Qual è la velocità del neutrino per l'osservatore  $K'$ ?*

**Esercizio 1.2.** *Due oggetti  $A$  e  $B$  si muovono, rispetto a un osservatore posto in  $P$ , di moto rettilineo uniforme con stessa direzione e verso. Le intensità delle loro velocità sono, nell'ordine,  $v_A = 0,806c$  e  $v_B = 0,906c$ . Qual è la velocità dell'oggetto  $B$  rispetto a un osservatore solidale con  $A$ ?*

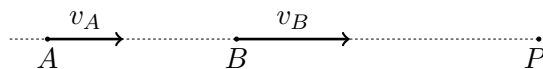


Figura 1

**Esercizio 1.3.** *Alla fine della sua permanenza nello spazio un astronauta in orbita attorno alla Terra sarà più giovane? Spiegare in termini qualitativi.*

**Esercizio 1.4.** *Un righello misura esattamente un metro. A quale velocità deve viaggiare un osservatore affinché, misurando il righello ottenga il valore di 50 cm?*

**Esercizio 1.5.** *Una navicella spaziale di forma cilindrica (lunghezza = 35,00 m, diametro = 8,25 m) sta sfrecciando parallelamente alla superficie terrestre alla velocità (costante) di  $2,44 \cdot 10^8$  m/s nella direzione dell'asse del cilindro. Quali sono le dimensioni della navicella misurate dalla Terra?*

**Esercizio 1.6.** *Gli elettroni in un acceleratore di particelle possono raggiungere velocità  $v$  prossime a quella della luce. Trovare nei seguenti due casi di quante volte aumenta la massa dell'elettrone rispetto alla sua massa a riposo ( $M_0$ )*

(a)  $v = 0,999999955c$

---

<sup>1</sup>Nome file: relativita\_speciale\_esercizi\_2019.tex

(b)  $v = 0,999000000 c$

**Esercizio 1.7.** *Trovare l'energia che bisogna fornire a un elettrone affinché si muova con velocità pari a*

(a)  $v = 0,999999955 c$

(b)  $v = 0,999000000 c$

*La massa a riposo dell'elettrone è  $M_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg.*

**Esercizio 1.8.** *Due oggetti, diciamo A e B, si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme, uno verso l'altro. Le loro velocità rispetto a un osservatore solidale con la Terra sono, nell'ordine,  $v_a$  e  $v_b$ .*

1. *Secondo la fisica classica con quale velocità l'oggetto B vede l'oggetto A venire verso di sé? Che cosa cambia secondo la relatività ristretta?*
2. *Risolvere il quesito precedente nel caso  $v_a = 10000$  m/s e  $v_b = 8100$  m/s.*

Curiosità dalla rete.

1. *Il veicolo con equipaggio umano che ha raggiunto la più alta velocità è stato il Modulo di Comando denominato "Charlie Brown" della missione Apollo 10 che il 26 maggio 1969 raggiunse la velocità di 39897 km/h = 11,08 km/s*
2. *La massima velocità mai raggiunta da un oggetto creato dall'uomo è stata di 252792 km/h, ossia di 70,22 km/s, raggiunta dalla sonda spaziale "Helios 2" grazie alla spinta ricevuta dal campo gravitazionale del Sole. La sonda è stata lanciata il 16 gennaio 1976 ed è arrivata a 43 milioni di chilometri dal Sole.*
3. *La più alta velocità per un aereo in grado di decollare e atterrare autonomamente appartiene al A-12 che raggiunse la velocità di Mach 3,35, cioè 3500 km/h all'altitudine di 23000 m. Gli attuali F 35 raggiungono in quota la velocità massima di Mach 1,7.*

**Esercizio 1.9** (Paradosso dei due gemelli.). *Uno di due gemelli di 25 anni decide di intraprendere un viaggio spaziale mentre l'altro rimane sulla Terra. Il viaggio viene percorso alla velocità costante di  $0,95c$  sia all'andata che al ritorno e il viaggio ha la durata di 39 anni (velocità e tempo sono misurati dalla Terra). Determinare le età dei due gemelli al termine del viaggio.*

**Esercizio 1.10** (Vero o Falso?). *Due sistemi di riferimento sono in moto relativo tra loro (uno dei due sistemi si muove con velocità  $v$  rispetto all'altro). Per il principio di relatività le seguenti grandezze, misurate nei due sistemi di riferimento, sono le stesse*

V  F *Velocità di un elettrone.*

- V*    *F*   *Carica dell'elettrone.*
- V*    *F*   *Valore della velocità della luce nel vuoto.*
- V*    *F*   *Energia cinetica del protone.*
- V*    *F*   *Intervallo di tempo tra due eventi.*
- V*    *F*   *Ordine degli elementi nella tavola periodica.*
- V*    *F*   *Prima legge di Newton*

**Esercizio 1.11.** *Trovare l'energia (a riposo) contenuta in un grammo di sabbia.*

**Esercizio 1.12.** *Un acceleratore di protoni è in grado di imprimere a un protone un'energia cinetica di  $10^{-2}$  erg. Di quante volte aumenta la sua massa?*

## 1.1 Risposte

**Esercizio 1.1** La velocità del neutrino misurata dall'osservatore  $K'$  è

$$w = \frac{c + w'}{1 + \frac{cw'}{c^2}} = \frac{c^2(c + w')}{c(c + w')} = c$$

Pertanto qualunque cosa si muova alla velocità della luce, possiede velocità  $c$  rispetto a qualsiasi osservatore, indipendentemente dalla velocità di quest'ultimo.

### Esercizio 1.2

Sia  $K'$  il sistema di riferimento solidale con  $P$  e  $K$  quello solidale con  $A$ . La velocità di  $K'$  rispetto a  $K$  è  $-v_A$  mentre l'oggetto  $B$  si muove, rispetto a  $K'$ , con velocità  $v_B$ .

La velocità  $w$  dell'oggetto  $B$  rispetto ad  $A$  si ottiene dal teorema di addizione delle velocità  $w = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}$ , ponendo  $v = -v_A$ ,  $w' = v_B$ . Si ottiene

$$w = \frac{(0,906 - 0,806)c}{1 - (0,906 \cdot 0,806)} = \frac{0,106}{0,269764} c = 0,39 c$$

**Esercizio 1.3** Sì. Tuttavia il fattore  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  è talmente prossimo a 1 che la differenza non è apprezzabile.

**Esercizio 1.4** Se la velocità, misurata da  $K$ , del sistema di riferimento  $K'$  è  $v$  si ha

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x$$

Posto  $\Delta x' = 0,50$  m e  $\Delta x = 1$  m si ottiene

$$0,50 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad (0,50)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}; \quad 0,25 c^2 = c^2 - v^2; \quad v^2 = 0,75 c^2. \quad \text{Ossia}$$

$$v = \sqrt{0,75} c = 0,87 c$$

**Esercizio 1.6**  $M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Quindi

(a)  $M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - (0,99999995)^2}} = \frac{M_0}{3 \cdot 10^{-4}} \approx 3300 M_0$ . La massa dell'elettrone è circa 3300 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

(b)  $M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - (0,999)^2}} = \frac{M_0}{4,47 \cdot 10^{-2}} \approx 22 M_0$ . La massa dell'elettrone è circa 22 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

**Esercizio 1.7**  $\Delta E = M c^2 - M_0 c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$

$$(a) \Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-0,999999955^2}} - 1 \right) \approx 81,99 \cdot 10^{-15} \cdot 3332 \approx 2,73 \cdot 10^{-10} \text{ J.}$$

$$(b) \Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-0,999^2}} - 1 \right) \approx 81,99 \cdot 10^{-15} \cdot 21,37 \approx 1,75 \cdot 10^{-12} \text{ J.}$$

**Esercizio 1.9** Sia  $A$  il gemello che rimane sulla Terra e  $B$  quello che compie il viaggio nello spazio. Per  $A$  il viaggio ha la durata di esattamente 39 anni, quindi la sua età, al ritorno di  $B$  sulla Terra, è di 64 anni.

Per quanto riguarda  $B$  la situazione è diversa. Durante il viaggio di andata, la distanza che lo separa dalla stella è contratta del fattore  $\sqrt{1-0,95^2}$ . Quindi la distanza Terra-Stella è di  $39 : 2 = 19,5$  anni luce se misurata da  $A$ , mentre è di  $\approx 0,31 \cdot 39 \approx 12,18$  anni luce se misurata da  $B$ . Allo stesso tempo  $B$  vede la Terra allontanarsi alla velocità di  $0,95c$ , il tempo che egli calcola per raggiungere la stella è allora di  $\sqrt{1-0,95^2} \cdot 19,5$  anni luce =  $6,1$  anni, ossia  $12,2$  anni includendo anche il viaggio di ritorno. Pertanto il gemello  $B$ , al termine del viaggio, avrà  $25 + 12,2 = 37,2$  anni,  $26,8$  anni in meno del fratello  $A$ .