RELATIVITÀ SPECIALE

ESERCIZI

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

[1]

Indice

[1]Nome file: relativita_speciale_esercizi_2023.tex

1 Relatività della simultaneità, contrazione delle lunghezze, dilatazione dei tempi

Esercizio 1.1. *Il principio (assioma) della relatività speciale relativo alla luce afferma:* la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutte le direzioni e in tutti i sistemi di riferimento inerziali. *Spiegare questa assunzione. Che cosa si intende per sistema di riferimento inerziale?*

R

Esercizio 1.2. *Il principio (assioma) di relatività afferma:* le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. *Che cosa significa? Cosa cambia rispetto all'analogo principio della fisica classica? Commentare.*

R

Esercizio 1.3. *Quali sono le 'trasformazioni di Lorentz'? Per quali ragioni sono così importanti? Spiegare.*

R

Esercizio 1.4 (Simultaneità). *Si osservi la seguente figura:*

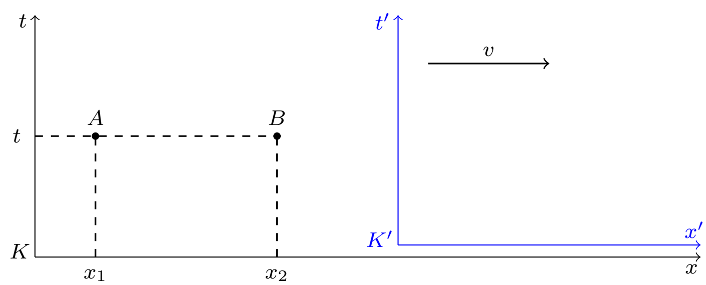


Figura 1: Il sistema di riferimento K' si muove, rispetto a K, con velocità v costante.

Gli eventi A e B avvengano, rispetto a K, simultaneamente all'istante t ma in luoghi differenti: $A = (x_1, t)$ e $B = (x_2, t)$, con $x_1 \neq x_2$. Se osservati da K' gli eventi A e B risultano essere ancora simultanei? Spiegare.

R

Esercizio 1.5 (Fattore γ). *Rispondere alle seguenti domande argomentando adeguatamente.*

(a) Il fattore γ è sempre strettamente maggiore di 1. Perché?

(b) Per quale velocità (espressa in funzione di c), si ha $\gamma = 2$?

R

Esercizio 1.6 (Orologio a luce)**.** *A quale distanza si devono posizionare i due specchi di un orologio a luce se si vuole che ogni "battito" corrisponda a* 1 μs*?*

R

Esercizio 1.7 (Dilatazione dei tempi)**.** *Mostrare la dilatazione dei tempi servendosi di due orologi a luce identici, uno in quiete e l'altro in moto con velocità uniforme v rispetto al primo.*

R

Esercizio 1.8. *Alla fine della sua permanenza nello spazio un astronauta in orbita attorno alla Terra sarà più giovane? Spiegare in termini qualitativi.*

R

Esercizio 1.9 (Lunghezza propria, tempo proprio)**.** *Un'astronave A intraprende un viaggio dalla Terra alla stella Sirio con velocità uniforme pari a v. Indicato con K un sistema di riferimento solidale con la Terra (e Sirio) e con K' un sistema di riferimento solidale con A, trovare:*

(a) *la lunghezza propria Terra-Sirio e il tempo proprio corrispondente alla durata del viaggio.*

(b) *la velocità di K rispetto a K'.*

(c) *la distanza Terra-Sirio misurata da K' (solidale con l'astronave).*

R

Esercizio 1.10. *Due sistemi di riferimento inerziale K e K' sono in moto relativo con velocità v. Rispetto a K, gli eventi E_1 e E_2 risultano essere simultanei e separati da una distanza* $6 \cdot 10^2$ km *mentre, ripetto a K', la loro distanza risulta essere* $1,80 \cdot 10^3$ km. *Determinare:*

(a) il fattore di Lorentz γ;

(b) la velocità relativa v tra i due sistemi di riferimento;

(c) l'intervallo di tempo che separa gli eventi E_1, E_2, rispetto a K'.

R

Esercizio 1.11. *Il sistema di riferimento K è solidale con la Terra mentre K' è in moto con velocità $v = 30$ m/s. Due eventi A e B, osservati da K, risultano simultanei e separati da una distanza pari a d. Quanto deve valere d affinché l'intervallo temporale tra i due eventi, osservati da K' sia di 10 minuti?*

R

Esercizio 1.12. *La lunghezza di un'asta misurata da un'osservatore in moto con velocità v uniforme rispetto a essa, è pari a $L = 0,91\ L_0$ (L_0 indica ha lunghezza propria dell'asta). Trovare la velocità v dell'osservatore (esprimere il risultato in funzione della velocità c della luce).*

R

Esercizio 1.13 (Romeni, La realtà della fisica). *A quale velocità rispetto alla Terra deve viaggiare un'astronave per accumulare un ritardo di un secondo al giorno?*

R

Esercizio 1.14. *Un righello misura esattamente un metro. A quale velocità deve viaggiare un osservatore affinchè, misurando il righello ottenga il valore di* 50 cm*?*

R

Esercizio 1.15. *Una navicella spaziale di forma cilindrica sta sfrecciando parallelamente alla superficie terrestre alla velocità (costante) di $2,44 \cdot 10^8$ m/s nella direzione dell'asse del cilindro. Le sue dimensioni misurate da un osservatore posto sulla navicella sono: lunghezza = 35,00 m, diametro = 8,25 m). Quali sono le dimensioni della navicella misurate dalla Terra?*

R

Esercizio 1.16. *Una sonda viaggia dalla stazione spaziale A alla stazione B. Il tempo di trasferimento registrato da un orologio solidale con la sonda è di $6,0$ s. La velocità della sonda rispetto alle stazioni spaziali è di $0,6\,c$. Determinare*

(a) il tempo di trasferimento della sonda rispetto a un orologio solidale con le stazioni spaziali.

(b) la distanza tra le stazioni spaziali A e B misurate da un osservatore solidale con la sonda.

(c) la distanza tra le stazioni spaziali A e B misurate da un osservatore solidale con la sonda.

R

Esercizio 1.17 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving). *Due stazioni spaziali A e B distano $4,0 \cdot 10^6$ km. Quando l'orologio della stazione A segna $0,0$ s, un razzo parte verso B alla velocità di $0,6\,c$. Determinare*

1. *la durata del viaggio per un osservatore solidale con le stazioni spaziali.*

2. *la durata del viaggio per un osservatore solidale con il razzo.*

R

Esercizio 1.18 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving). *Su una mappa, un certo tratto di strada è indicato di lunghezza $12,5\ rmkm$*

1. *Qual è la sua lunghezza propria?*

2. *Qual è la lunghezza di quel tratto di strada, se viene misurato da un osservatore che viaggia alla velocità di $0,95\,c$, parallelamente alla strada?*

3. *Quale deve essere la velocità dell'osservatore affinché il tratto di strada gli appaia lungo $6,50$ km?*

R

Esercizio 1.19 (J. S. Walker, Fisica. Modelli teorici e problem solving). *Una sonda viaggia alla velocità di $0,8\,c$ per un tempo di $3,0$ s misurato da un orologiosolidale con la sonda stessa*

1. *Quanto dura il viaggio per un orologio sulla Terra?*

2. *Quale distanza percorre la sonda nel sistema di riferimento della Terra?*

R

Esercizio 1.20 (Romeni, La realtà della fisica). *Un'astronave, ferma sulla Terra, viene affiancata da un'altra astronave gemella che si muove con velocità uniforme pari a $v = 0,45\ c$. Entrambe hanno lunghezza propria $L_0 = 86$ m.*

(a) *Calcolare la lunghezza di ciascuna astronave misurata nel sistema di riferimento dell'altra.*

Agli estremi A e B dell'astronave ferma sulla Terra vi sono due orologi sincronizzati in modo tale che $t_A = t_B = 0$ quando l'estremo B' dell'astronave in moto è in linea con l'estremo A dell'astronave ferma.

(b) *Calcolare il tempo misurato dall'orologio in B nell'istante in cui B' sorvola B.*

(c) *Calcolare il tempo misurato dall'orologio in A nell'istante in cui A' sorvola A.*

R

Esercizio 1.21 (Halliday, Resnick,Walker, *Fondamenti di fisica*, Zanichelli)**.** *La particella elementare denominata* kaone positivo *(K^+) possiede una vita media di* $0,1237$ μs *a riposo, cioè rispetto a un sistema di riferimento solidale con la particella stessa. Se si producono kaoni con velocità di* $0,990\,c$ *rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, quanta strada possono percorrere, nel riferimento del laboratorio, durante la vita media? Quale sarebbe stato il risultato secondo la fisica classica?*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.22 (Paradosso dei due gemelli.)**.** *Uno di due gemelli di* 25 *anni decide di intraprendere un viaggio spaziale mentre l'altro rimane sulla Terra. Il viaggio viene percorso alla velocità costante di* $0,95\,c$ *sia all'andata che al ritorno e il viaggio ha la durata di* 39 *anni (velocità e tempo sono misurati dalla Terra). Determinare le età dei due gemelli al termine del viaggio.*

$\boxed{R}$

2 Composizione delle velocità

Teorema 2.1 (di addizione delle velocità). *Sia K' un sistema di riferimento che si muove orizzontalmente, da sinistra verso destra, con velocità v (uniforme) rispetto al sistema K. Sia inoltre w' la velocità (uniforme) di un oggetto, misurata nel sistema K'.*

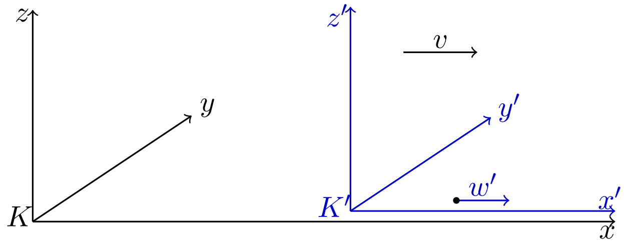
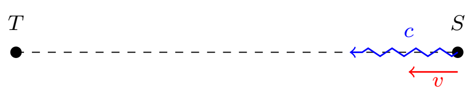


Figura 2

Allora la velocità del medesimo oggetto, misurata in K è

$$w = \frac{v + w'}{1 + \dfrac{vw'}{c^2}}$$

Esercizio 2.2 (v + c = c). *Una sonda che si sta avvicinando alla Terra con velocità v emette un segnale luminoso (direzione e verso sono quelli del suo moto). Qual è la velocità del segnale luminoso rispetto alla Terra?*

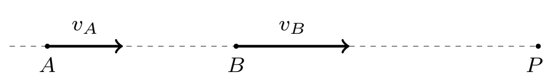


R

Esercizio 2.3. *Un neutrino (una particella elementare) si muove rispetto a un osservatore solidale con la Terra con velocità $v = c$. Un altro osservatore, diciamo K', si muove con velocità w verso il neutrino. Qual è la velocità del neutrino per l'osservatore K'?*

R

Esercizio 2.4. *Due oggetti A e B si muovono, rispetto a un osservatore posto in P, di moto rettilineo uniforme con stessa direzione e verso. Le intensità delle loro velocità sono, nell'ordine, $v_A = 0,806\,c$ e $v_B = 0,906\,c$. Qual è la velocità dell'oggetto B rispetto a un osservatore solidale con A?*



$\boxed{R}$

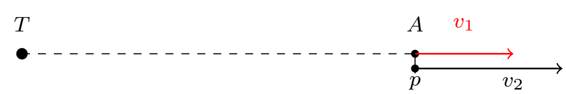
Esercizio 2.5. *Due oggetti, diciamo A e B, si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme, uno verso l'altro. Le loro velocità rispetto a un osservatore solidale con la Terra sono, nell'ordine, v_a e v_b.*

(a) *Secondo la fisica classica con quale velocità l'oggetto B vede l'oggetto A venire verso di sè? Che cosa cambia secondo la relatività ristretta?*

b *Risolvere il quesito precedente nel caso* $v_a = 10000\,\mathrm{m/s}$ *e* $v_b = 8100\,\mathrm{m/s}$.

$\boxed{R}$

Esercizio 2.6. *Un'astronave A si allontana a velocità $v_1 = 0,60\ c$ rispetto alla Terra. In seguito a un esperimento effettuato sull'astronave, viene emessa una particella p. Un'osservatore sull'astronave misura per la particella p,la velocità $v_2 = 0,90\ c$ (direzione e verso sono quelli riportati in figura). Trovare la velocità relativa di p rispetto alla Terra.*



$\boxed{R}$

<u>Le velocità più elevate raggiunte finora dall'uomo</u>

1. Il veicolo con equipaggio umano che ha raggiunto la più alta velocità è stato il Modulo di Comando denominato "Charlie Brown" della missione Apollo 10 che il 26 maggio 1969 raggiunse la velocità di $39897\,\mathrm{km/h} = 11,08\,\mathrm{km/s}$

2. La massima velocità mai raggiunta da un oggetto creato dall'uomo è stata di $252792\,\mathrm{km/h}$, ossia di $70,22\,\mathrm{km/s}$, raggiunta dalla sonda spaziale "Helios 2" grazie alla spinta ricevuta dal campo gravitazionale del Sole. La sonda è stata lanciata il 16 gennaio 1976 ed è arrivata a 43 milioni di chilometri dal Sole.

3. La più alta velocità per un aereo in grado di decollare e atterrare autonomamente appartiene al A-12 che raggiunse la velocità di Mach $3,35$, cioè $3500\,\mathrm{km/h}$ all'altitudine di $23000\,\mathrm{m}$. Gli attuali $F\,35$ raggiungono in quota la velocità massima di Mach $1,7$.

3 Dinamica relativistica

Esercizio 3.1. *Gli elettroni in un acceleratore di particelle possono raggiungere velocità v prossime a quella della luce. Trovare nei seguenti due casi di quante volte aumenta la massa dell'elettrone rispetto alla sua massa a riposo (M_0)*

(a) $v = 0,999999955\, c$

(b) $v = 0,999000000\, c$

$\boxed{R}$

Esercizio 3.2. *Trovare l'energia che bisogna fornire a un elettrone affinchè si muova con velocità pari a*

(a) $v = 0,999999955\, c$

(b) $v = 0,999000000\, c$

La massa a riposo dell'elettrone è $M_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

$\boxed{R}$

Esercizio 3.3 (Vero o Falso?). *Due sistemi di riferimento sono in moto relativo tra loro (uno dei due sistemi si muove con velocità v rispetto all'altro). Per il principio di relatività le seguenti grandezze, misurate nei due sistemi di riferimento, sono le stesse*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Velocità di un elettrone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Carica dell'elettrone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Valore della velocità della luce nel vuoto.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Energia cinetica del protone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Intervallo di tempo tra due eventi.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Ordine degli elementi nella tavola periodica.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Prima legge di Newton*

$\boxed{R}$

Esercizio 3.4. *Trovare l'energia (a riposo) contenuta in un grammo di sabbia.*

$\boxed{R}$

Esercizio 3.5. *Un acceleratore di protoni è in grado di imprimere a un protone un'energia cinetica di* $10^{-2}\,\mathrm{erg}$. *Di quante volte aumenta la sua massa?*

4 Soluzioni e risposte

Esercizio 1.1

Consultare il libro di testo o gli appunti distribuiti a lezione.

Esercizio 1.2

Consultare il libro di testo o gli appunti distribuiti a lezione.

Esercizio 1.3

Consultare il libro di testo o gli appunti distribuiti a lezione.

Esercizio 1.4

Le trasformazioni di Lorentz dicono che il tempo (t') dipende anche dalle coordinate spaziali. Più precisamente, l'evento A si verifica in K' all'istante

$$t'_1 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}\, x_1\right)$$

mentre l'evento B si verifica al tempo

$$t'_2 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}\, x_2\right)$$

Cioè , gli eventi che erano simultanei in K non lo sono più in K'! Sono separati da un intervallo temporale pari a

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\, \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \tag{4.1}$$

Esercizio 1.5

(a) Il fattore γ è espresso da una frazione il cui numeratore è 1 e il denominatore è un numero compreso tra 0 e 1. Quindi ...

(b) Basta porre il fattore γ uguale a due: $2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Con pochi calcoli si ricava $v = 0,87\ c$.

Esercizio 1.6

La velocità della luce in qualsiasi sistema di riferimento inerziale è pari a $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

In un microsecondo la luce percorre (10^{-6} s) ($3 \cdot 10^8$ m/s) = 300 m (che coincide con la distanza a cui devono essere posti i due specchi paralleli).

Esercizio 1.7

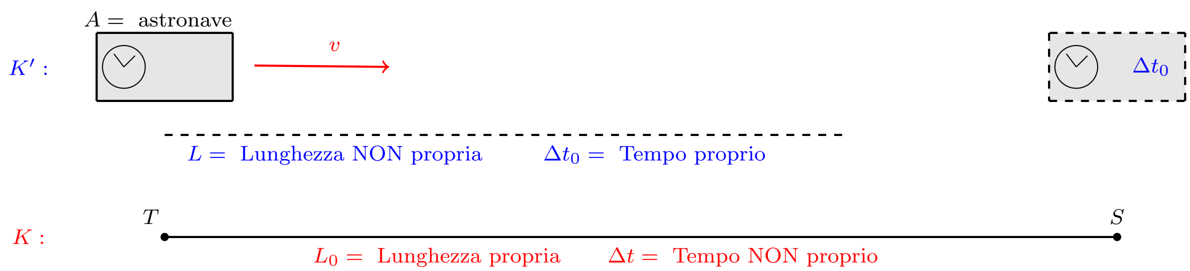
Consultare il proprio libro di testo o gli appunti forniti a lezione.

Esercizio 1.8

Sì. Tuttavia il fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ è talmente prossimo a 1 che la differenza non è apprezzabile.

Esercizio 1.9

(a) La lunghezza propria L_0 è quella che misura K poiché Terra e Sirio sono in quiete rispetto ad esso. Invece, gli eventi 'partenza dalla Terra' e 'arrivo su Sirio' avvengono per K in luoghi (punti) diversi. Ne segue che il tempo del viaggio misurata da K NON è proprio (risulterà dilatato rispetto a quello misurato dall'astronave).



(b) L'intensità della velocità con la quale K' vede allontanarsi K è sempre v. Ovviamente quello che cambia è il verso.

(c) Il modulo della velocità con la quale ciascun sistema di riferimento vede allontanarsi l'altro è per entrambi pari a v. Segue

$$v = \frac{L}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Ricordando la legge di dilatazione dei tempi ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$), dalla (4.2), si ricava:

$$\frac{L}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{\gamma \Delta t_0}$$

Ossia

$$L = \gamma^{-1} L_0 \tag{4.3}$$

La (4.3) esprime la *legge di contrazione delle lunghezze*.

Esercizio 1.10

Si supponga arbitrariamente che K sia il sistema in quiete e K' in moto relativo rispetto a K con velocità v.

(a) Le coordinate spaziali degli eventi E_1, E_2, rispetto a K' sono espresse dalla prima trasformazione di Lorentz:

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{e} \quad x_2' = \gamma(x_2 - vt_2)$$

Sottraendo membro a membro si ricava

$$x_2' - x_1' = \gamma((x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1))$$

Poiché i due eventi risultano simultanei in K, cioè $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, si ottiene:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

e, infine

$$\gamma = \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = \frac{1800}{600} = 3$$

(b) La velocità relativa v tra i due sistemi di riferimento si ricava immediatamente dalla definizione del fattore di Lorentz

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si ottiene: $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,c$.

(c) Da $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x)$, si ottiene:

$$3\left(0 - \frac{2\sqrt{2}\,c\,6\cdot 10^5}{3\,c^2}\right) = -\frac{12\,\sqrt{2}\cdot 10^5}{3\cdot 10^8} = -5,7 \text{ ms}$$

Quindi i due eventi E_1, E_2, simultanei in K, non lo sono più in K'. Il segno 'meno' del risultato dice che, in K', E_2 precede E_1.

Esercizio 1.11

Si veda l'esecizio 1.4 Dall'uguaglianza

$$\Delta t' = \gamma\,\frac{v}{c^2}d$$

si ottiene:

$$d = \frac{c^2\cdot\Delta t'}{\gamma\,v} = 1,8\cdot 10^{18} \text{ m}$$

È circa la distanza che ci separa dalle stelle più vicine ($\sim$ 20 anni luce).

Esercizio 1.12

La lunghezza $L = 0,91\ L_0$ risulta contratta perchè è misurata da un sistema di riferimento in moto relativo rispetto all'asta. Da $L = \gamma^{-1}L_0$ si ricava:

$$0,91\ L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ L_0$$

$$0,91^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$$v^2 = c^2 - 0,91^2\,c^2$$

$$v^2 = (1 - 0,91^2)\, c^2$$

$$v = 0,41\, c$$

Esercizio 1.13

1 g $= 24 \cdot 3600$ s $= 86400$ s.

Da $\Delta t = \gamma\ \Delta t_0$, ponendo $\Delta t = 86401$ s, si ottiene:

$$86401 = \frac{86400}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$86401^2\ v^2 = (86401^2 - 86400^2)\ c^2$$

$$v = \sqrt{\frac{86401^2 - 86400^2}{86401^2}}\ c = 4,811 \cdot 10^{-3}\ c$$

Per esprimere la velocità in chilometri al secondo basta fare il seguente calcolo:

$$v = 4,811 \cdot 10^{-3} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 = 14,423 \cdot 10^5\ \text{m/s} = 1442,3\ \text{km/s}$$

Esercizio 1.14

Se la velocità, misurata da K, del sistema di riferimento K' è v si ha

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta x$$

Posto $\Delta x' = 0,50\,\text{m}$ e $\Delta x = 1\,\text{m}$ si ottiene

$0,50 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; $\quad (0,50)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$; $\quad 0,25\, c^2 = c^2 - v^2$; $\quad v^2 = 0.75\, c$. Ossia

$$v = \sqrt{0,75}\, c = 0,87\, c$$

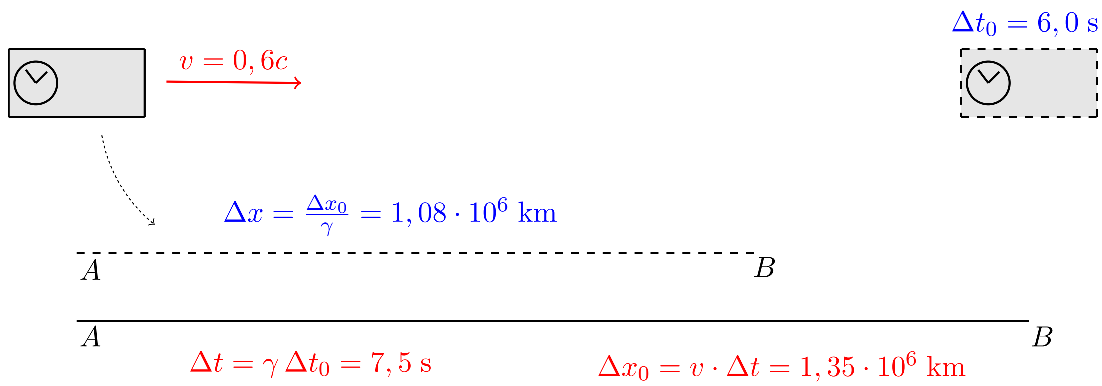
Esercizio 1.15

La lunghezza $L_0 = 2,44 \cdot 10^8$ m/s è misurata da un osservatore solidale con la navicella: si tratta di una lunghezza propria. Invece, un osservatore solidale con la terra misurerà una lunghezza contratta pari a

$$L = \gamma^{-1}\ L_0 = \sqrt{1 - \frac{(2,44 \cdot 10^8)^2}{(3,00 \cdot 10^8)^2}} \cdot 35 = 20,36\ \text{m}$$

Invece, il diametro della base circolare della navicella non subisce variazioni perchè risulta sempre perpendicolare alla direzione di moto.

Esercizio 1.16



L'*osservatore solidale con la sonda* misura, per la durata del viaggio, il tempo $\Delta t_0 = 6,0$ s (tempo proprio) e vede contratta la distanza $\Delta x = \overline{AB}$ che separa le due stazioni spaziali ($\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0 = 1,08 \cdot 10^6$ km).

L'osservatore solidale con le stazioni spaziali misura un intervallo di tempo più lungo, per il viaggio: $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 7,5$ s. Per questo osservatore, la distanza tra le due stazioni spaziali è $\Delta x_0 = v \cdot \Delta t = 1,35 \cdot 10^6$ km.

Esercizio 1.17

La distanza $4,0 \cdot 10^6$ km indica la *lunghezza propria* che separa le due stazioni spaziali, cioè Δx_0. Quindi il tempo del viaggio, misurato da un sistema di riferimento solidale con le stazioni è

$$\Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{4,0 \cdot 10^9 \text{ m}}{0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 22,2 \text{ s}$$

Il *tempo proprio* del viaggio (misurato rispetto a un sistema di riferimento solidale con il razzo) è

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}\,\Delta t = \sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}} \cdot 22,2 \text{ s} = 17,8 \text{ s}$$

Esercizio 1.18

1. La lunghezza propria è *la distanza tra due punti misurata da un osservatore in quiete rispetto a essi*. Quindi, $\Delta x_0 = 12,5$ km.

2. L'osservatore in questione vede il tratto di strada contratto:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0 = \sqrt{1 - \frac{(0,95\,c)^2}{c^2}}\, 12,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 3903 \text{ m} \sim 3,9 \text{ km}$$

3. Dall'uguaglianza $\Delta x = \dfrac{1}{\gamma}\Delta x_0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
6,50 \cdot 10^3 &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot 12,5 \cdot 10^3 \\
\left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2 &= 1-\frac{v^2}{c^2} \\
\frac{v^2}{c^2} &= 1-\left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2 \\
v &= \sqrt{1-\left(\frac{6,50}{12,5}\right)^2}\, c
\end{aligned}$$

Ossia, $v = 0,854\, c$.

Esercizio 1.19

L'esercizio è analogo ai precedenti, gli aspetti concettuali sono gli stessi, quel che cambia è la descrizione dell'ipotetico fenomeno. Dunque, bisogna porsi le stesse domande: qual è il tempo proprio, quale la lunghezza propria?

Il *tempo proprio è il tempo che un orologio misura nel proprio sistema di riposo*; quindi, $\Delta t_0 = 3,0$ s. Questa misura si riferisce a un sistema di riferimento solidale con la sonda, mentre la velocità $v = 0,8\,c$ è relativa a un *altro* sistema di riferimento, solidale con la Terra.

Pertanto, la durata del viaggio per un osservatore sulla Terra è

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}} \cdot 3,0 \text{ s} = 5 \text{ s}$$

Infine, la distanza percorsa dalla sonda, secondo un sistema di riferimento terrestre è

$$\Delta x = v\Delta t = 0,8c \cdot 5,0 \text{ s} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Esercizio 1.20

(a) La lunghezza L di ciascuna astronave misurata nel sistema di riferimento dell'altra è

$$L = \gamma^{-1}\, L_0$$

In questo caso si ha:

$$L = 86 \cdot \sqrt{1-\frac{0,45\,c^2}{c^2}} = 76,80 \text{ m}$$

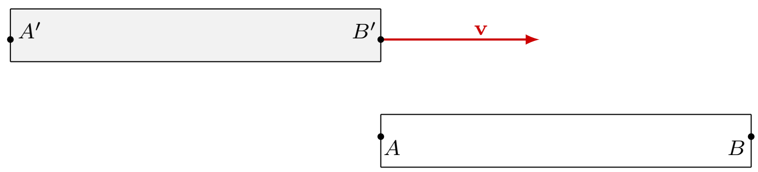


Figura 3: Quando le due astronavi assumono questa configurazione gli orologi posti in A e B segnano "tempo zero ".

(b) L'osservatore in B misura la lunghezza propria dell'astronave ferma ($L_0 = 86$ m) e vede muoversi il punto B' con velocità uniforme $v = 0,45\ c$. Dall'uguaglianza $v = \frac{L_0}{t_B}$ si ricava il tempo t_B che misura l'osservatore in B:

$$t_B = \frac{L_0}{v} = \frac{86}{0,45 \cdot (3 \cdot 10^8)} = 6,37 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

(c) L'osservatore in A misura la lunghezza dell'astronave in moto ($L = 77$ m). Dall'uguaglianza $v = \frac{L}{t_A}$ si ricava il tempo t_A che misura l'osservatore in A:

$$t_A = \frac{L}{v} = \frac{77}{0,45 \cdot (3 \cdot 10^8)} = 5,70 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Esercizio 1.21

Il tempo di vita media del kaone ($\Delta t_0 = 0,1237\ \mu\mathrm{s}$) è misurato rispetto a un sistema di riferimento solidale con la particella, quindi si tratta di un tempo proprio. Il tempo di vita Δt calcolato rispetto a un sistema di riferimento solidale con il laboratorio, risulterà dilatato e pari a

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0,1237 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,990\,c}{c}\right)^2}} = 8,769 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, la distanza percorsa dal kaone è

$$d = v\,\Delta t = 0,990 \cdot 3 \cdot 10^8 = 260,4\ \mathrm{m}$$

Invece, secondo la fisica classica, distanza percorsa e tempo di vita media sono gli stessi, sia nel sistema di riferimento solidale con il laboratorio, sia in quello solidale con la particella. Si ottiene:

$$d = v\,\Delta t_0 = 0,990 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,237 \cdot 10^{-7} = 36,7\ \mathrm{m}$$

Esercizio 1.22

Sia A il gemello che rimane sulla Terra e B quello che compie il viaggio nello spazio. Per A il viaggio ha la durata di esattamente 39 anni, quindi la sua età, al ritorno di B sulla Terra, è di 64 anni.

Per quanto riguarda B la situazione è diversa. Durante il viaggio di andata, la distanza che lo separa dalla stella è contratta del fattore $\sqrt{1 - 0,95^2}$. Quindi la distanza Terra-Stella è di $39 : 2 = 19,5\,$anni luce se misurata da A, mentre è di $\approx 0,31 \cdot 39 \approx 12,18\,$anni luce se misurata da B. Allo stesso tempo B vede la Terra allontanarsi alla velocità di $0,95\,c$, il tempo che egli calcola per raggiungere la stella è allora di $\sqrt{1-0,95^2} \cdot 19,5\,$anni luce $= 6,1\,$anni, ossia $12,2\,$anni includendo anche il viaggio di ritorno. Pertanto il gemello B, al termine del viaggio, avrà $25 + 12,2 = 37,2\,$anni, $26,8\,$anni in meno del fratello A.

Esercizio 2.2 Dal teorema di composizione delle velocità si ricava che, rispetto a un osservatore solidale con la Terra, la velocità del raggio luminoso è pari a

$$w = \frac{v+c}{1+\frac{vc}{c^2}} = \frac{c^2(v+c)}{c^2+vc} = c$$

Esercizio 2.3 La velocità del neutrino misurata dall'osservatore K' è

$$w = \frac{c+w'}{1+\frac{c\,w'}{c^2}} = \frac{c^2(c+w')}{c(c+w')} = c$$

Pertanto qualunque cosa si muova alla velocità della luce, possiede velocità c rispetto a qualsiasi osservatore, indipendentemente dalla velocità di quest'ultimo.

Esercizio 2.4

Sia K' il sistema di riferimento solidale con P e K quello solidale con A. La velocità di K' rispetto a K è $-v_A$ mentre l'oggetto B si muove, rispetto a K', con velocità v_B.

La velocità w dell'oggetto B rispetto ad A si ottiene dal teorema di addizione delle velocità $w = \dfrac{v+w'}{1+\frac{vw'}{c^2}}$, ponendo $v = -v_A$, $w' = v_B$. Si ottiene

$$w = \frac{(0,906-0,806)c}{1-(0,906 \cdot 0,806)} = \frac{0,106}{0,269764}\,c = 0,39\,c$$

Esercizio 2.5

Esercizio 2.6

Secondo la fisica newtoniana le due velocità relative si dovrebbero sommare e questo comporterebbe il risultato (errato!) $v = 0,6\,c + 0,8\,c = 1,4\,c$.

Invece, se si interpreta v_1 come la velocità del sistema di riferimento (l'astronave) in moto rispetto alla Terra e v_2 la velocità della particella rispetto a esso, il (nuovo) teorema di composizione delle velocità fornisce il seguente risultato (corretto!):

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0,6\,c+0,8\,c}{1+\frac{0,6\,c+0,8\,c}{c^2}} = 0,95\,c$$

Esercizio 3.1

$M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Quindi

(a) $M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(0{,}999999955)^2}} = \frac{M_0}{3 \cdot 10^{-4}} \approx 3300\, M_0$. La massa dell'elettrone è circa 3300 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

(b) $M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(0{,}999)^2}} = \frac{M_0}{4{,}47 \cdot 10^{-2}} \approx 22\, M_0$. La massa dell'elettrone è circa 22 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

Esercizio 3.2

$$\Delta E = M\, c^2 - M_0\, c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, c^2 - M_0\, c^2 = M_0\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

(a) $\Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}999999955^2}} - 1 \right) \approx 81.99 \cdot 10^{-15} \cdot 3332 \approx 2,73 \cdot 10^{-10}$ J.

(b) $\Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}} - 1 \right) \approx 81.99 \cdot 10^{-15} \cdot 21,37 \approx 1,75 \cdot 10^{-12}$ J.