Calcolo differenziale
Esercizi e complementi

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Luglio 2014.[1]

Indice

1 Esercizi

Gli esercizi contrassegnati con (*) sono più difficili.

1.1 Funzioni derivabili

Esercizio 1.1. *Utilizzando la definizione di derivata (cioè il limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento), determinare la derivata prima $f'(x_0)$ nel punto x_0 delle seguenti funzioni*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 3$

2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$

4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x^2$

[1]Nome file: 'Calcolo_differenziale_esercizi_2014.tex'

Esercizio 1.2. *Dall'uguaglianza*

$$(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3$$

dedurre che la derivata della funzione x^3 *è* $3x^2$.

R

Esercizio 1.3. *L'area del cerchio di raggio* r *è* $A(r) = \pi r^2$ *e la sua derivata è*

$$A'(r) = 2\pi r$$

ossia la lunghezza della circonferenza di raggio r. *Interpretare geometricamente questo fatto servendosi di un disegno.*

R

Esercizio 1.4. *Il volume della sfera di raggio* r *è* $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ *e la sua derivata è*

$$V'(r) = 4\pi r^2$$

ovvero la superficie della sfera di raggio r. *Spiegare. Dare una interpretazione geometrica di questo fatto servendosi di un disegno.*

R

Esercizio 1.5. *La derivata di* $A(l) = l^2$, *l'area del quadrato di lato* l, *è* $A'(l) = 2l$, *la lunghezza del semiperimetro del quadrato. Interpretare geometricamente.*

R

Esercizio 1.6. *La derivata di* $V(l) = l^3$, *volume del cubo di spigolo* l, *è* $V'(l) = 3l^2$, *metà dell'area della superficie laterale. Interpretare geometricamente.*

R

Esercizio 1.7. *La legge oraria di un corpo in caduta libera è*

$$s(t) = 10 + 3t + \frac{1}{2}gt^2$$

dove s *indica la posizione del corpo,* t *il tempo e* g *l'accelerazione di gravità. Qual è la velocità del corpo all'istante* $t = 4$? *Si supponga* s *misurata in metri e* t *in secondi.*

R

Esercizio 1.8. *Un oggetto in moto descrive la circonferenza di raggio 2 rappresentata in figura. Se s indica l'arco di circonferenza e ϑ (misurato in radianti) l'angolo al centro, quanto vale* $\dfrac{ds}{d\vartheta}$*?*

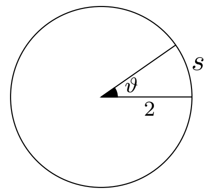


Figura 1

R

Esercizio 1.9. *La funzione* $[0, 2\pi]\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = |\cos x|$ *è differenziabile in* $[0, 2\pi]$*? Motivare la risposta.*

Approssimazioni al primo ordine

Esercizio 1.10. *Trovare l'approssimazione del primo ordine della funzione* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *in un intorno del punto* $x_0 = 1$*.*

R

Esercizio 1.11. *Scrivere l'approssimazione del primo ordine, centrata in* $x_0 = 2$*, della funzione*

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

R

Esercizio 1.12. *Per ognuna delle seguenti funzioni trovare l'approssimazione al primo ordine in un intorno del punto* $x_0 = 0$

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$
3. $f(x) = \ln(1+x)$
4. $f(x) = \ln(1-2x)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
7. $f(x) = e^{x}$
8. $f(x) = e^{-x}$

$\boxed{\text{R}}$

Esercizio 1.13. *Calcolare un valore approssimato della funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^3 + x^2$ *in* $x = 1,02$

$\boxed{\text{R}}$

Esercizio 1.14. *Calcolare un valore approssimato della funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *in* $x = 1,0003$

$\boxed{\text{R}}$

Esercizio 1.15. *Un pallone sferico viene gonfiato in modo che il suo raggio aumenti da* 20 cm *a* 20.20 cm. *Approssimando al primo ordine, di quanto è cresciuto il suo volume?*

$\boxed{\text{R}}$

Esercizio 1.16. *Le funzioni*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

sono derivabili in $\mathbb{R}$*? Motivare le risposte.*

Esercizio 1.17. *Determinare il dominio di derivabilità delle seguenti funzioni e poi, usando opportune regole di derivazione, trovare la derivata prima* $f'(x)$

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$

2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2 - x)$

3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^3}$

Esercizio 1.18. *Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $f'(x)$ delle funzioni seguenti. Precisare, infine, il dominio di $f'(x)$.*

a) $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$;

b) $f(x) = \exp\sqrt{x^2+1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^7}}$;

d) $f(x) = 2^x$

e) $f(x) = e^{x^2}\ln(1+x^2)$

f) $f(x) = e^{\sin x^3}$

$\boxed{R}$

Esercizio 1.19. *La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$*

$$g(x) = |1 - x^2|$$

è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$? Spiegare.

Esercizio 1.20. *Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R}$*

$$s(t) = -t^2 + 5t - 4$$

Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente a s in $t = 1$.

Esercizio 1.21. *Si consideri la funzione $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente a f in $x = 2$.

Esercizio 1.22. *Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$. Dire per quali punti del grafico di f la tangente risulta:*

1. *parallela alla retta* $y = 2x$;

2. *perpendicolare alla retta* $y = -x + 3$

Esercizio 1.23. *Dimostrare che per* $x \neq 0$ *le tangenti ai grafici delle funzioni*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 \qquad e \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{3x}$$

sono tra loro perpendicolari.

Esercizio 1.24. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R}$,

$$s(t) = \begin{cases} t - 1 & se \quad t \leq 0 \\ at + b & se \quad t > 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b *la funzione risulta derivabile per ogni* $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.25. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, $\quad h(t) = \begin{cases} t^3 + a & se \quad t \leq 0 \\ \cos t & se \quad 0 < t < \frac{3}{2}\pi \\ bt + c & se \quad t \geq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b, c *la funzione risulta derivabile per ogni* $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.26. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R} - \{\frac{4}{5}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{5x-4}$. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f *in* $x = 2$.

Esercizio 1.27. *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Dimostrare che:*

1. *se* f *è pari allora* f' *è dispari;*

2. *se* f *è dispari allora* f' *è pari.*

Esercizio 1.28. *Data la funzione* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$, *trovare la derivata di* $\sin^{-1}(= \arcsin)$ *usando la regola di derivazione della funzione inversa.*

R

Esercizio 1.29. *Data la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_{>0}$, *trovare la derivata di* $\exp^{-1}(= \ln)$ *usando la regola di derivazione della funzione inversa.*

R

Esercizio 1.30. *Determinare la derivata prima della funzione* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^x$.

R

Esercizio 1.31 (Esame di stato, anno 2008, quesito n. 8)**.** *Sia* f *la funzione definita da*

$$f(x) = \pi^x - x^\pi$$

Si precisi il dominio (massimale) di f *e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto* $x = \pi$.

R

1.2 Teoremi sulle funzioni derivabili

Esercizio 1.32.

1. *Scrivere l'enunciato del teorema del valore medio.*
2. *Dimostrare la seguente proposizione*

   Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita in un intevallo* I *di* $\mathbb{R}$

   Se f *è derivabile in* I *e per ogni* x *in* I *si ha* $f'(x) = 0$ *allora* f *è costante.*

Esercizio 1.33. *Un auto si muove lungo un percorso rettilineo dal punto* A *al punto* B. *Il teorema di Lagrange afferma che esiste almeno un istante di tempo in cui la velocità istantanea dell'auto è uguale alla sua velocità media relativa al tratto di strada che va da* A *a* B. *Spiegare.*

Esercizio 1.34 (Esame di stato, anno 2007, quesito n. 5)**.** *Si mostri che la funzione*

$$y = x^3 + 8$$

soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (teorema di Lagrange) nell'intervallo $[-2, 2]$. *Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.*

R

Esercizio 1.35. *Il seguente quesito è stato proposto all'esame di stato di liceo scientifico, corso di ordinamento, anno 2005. Si spieghi perchè ciò che si chiede di dimostrare è falso!*

Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

è costante e poi si calcoli il valore di tale costante.

R

Esercizio 1.36. (*) *Utilizzando il teorema di Lagrange dimostrare che, per ogni $x > 0$, vale la seguente disuguaglianza*

$$\ln x < x + 1$$

R

Esercizio 1.37. (*) *Durante una corsa automobilistica lungo una pista rettilinea, l'auto A sorpassa l'auto B due volte. Dimostrare che in qualche istante della corsa, le loro accelerazioni devono essere uguali.*

R

1.3 Massimi e minimi

Esercizio 1.38. *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ la funzione definita sul sottoinsieme D di $\mathbb{R}$. Scrivere*

1. *la definizione di* minimo locale *e di* massimo locale *per f*
2. *la definizione di* minimo assoluto *e di* massimo assoluto *per f*

Esercizio 1.39. *Sia*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

1. *La funzione f ha massimi o minimi locali? In caso affermativo determinarli.*
2. *La funzione f ha massimo assoluto? ha minimo assoluto? In caso affermativo determinarli.*

Esercizio 1.40. *Trovare massimo e minimo assoluto della funzione*

$$[0, 9] \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 5x$$

Esercizio 1.41. *La somma di due numeri non negativi è n. Qual è il valore massimo della somma dei loro quadrati?*

Esercizio 1.42. *Fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio, determinare quello di area massima.*

Esercizio 1.43. *Tra tutti i cilindri circolari retti inscrittibili in una data sfera trovare quello di volume massimo.*

Esercizio 1.44. *Fra tutti i cilindri aventi stessa superficie totale determinare quello di volume massimo.*

Esercizio 1.45. *Inscrivere nell'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

il rettangolo di area massima. Quanto vale tale area?

Esercizio 1.46 (Esame di stato, anno 2006, problema n. 1)**.** *Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.*

a) *Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?*

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) *la somma delle due aree sia minima?*

c) *la somma delle due aree sia massima?*

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo, cioè una scatola colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Esercizio 1.47. *Sia consideri il polinomio di grado 4*

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

Dimostrare la seguente proprietà :

se in due punti simmetrici rispetto all'origine, diciamo x_0 e $-x_0$, con $x_0 \neq 0$, il polinomio $P(x)$ assume lo stesso valore e i due punti sono stazionari allora $P(x)$ è pari.

R

Esercizio 1.48 (Esame di stato, anno 2014, quesito n. 8)**.** *Del polinomio $P(x)$ di grado quattro si sa che assume massimo assoluto nei punti $x = 2$ e in $x = 3$, $P(2) = P(3) = 3$ e $P(1) = 0$. Determinare $P(4)$.*

R

1.4 Riflessione e rifrazione

Esercizio 1.49 (Legge di riflessione.)**.** *La luce si muove in modo tale da impiegare il minor tempo possibile per andare da un punto ad un altro* (principio del tempo minimo)*. Un raggio di luce proveniente da P viene riflesso da uno specchio piano AB nel punto X e poi passa per il punto Q. Mostrare che i raggi PX e XQ formano angoli uguali con la normale ad AB in X.*

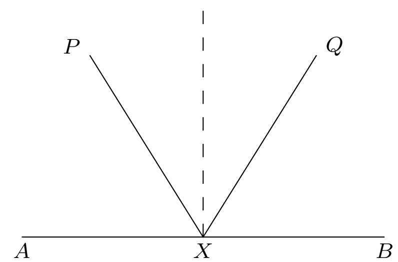


Figura 2

Soluzione.

La velocità della luce è costante, quindi la traiettoria di tempo minimo coincide con la traiettoria di distanza minima. Si tratta quindi di trovare il percorso più breve che collega P a Q passando per un punto X dello specchio. Nel sistema di riferimento mostrato in figura 2 si ha

$$d(x) = \overline{PX} + \overline{XQ} = \sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{(l - x^2) + p^2}$$

e tale distanza deve essere minima.

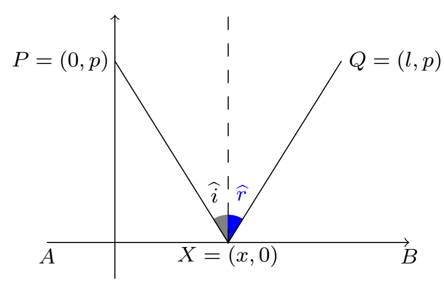


Figura 3

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} + \frac{x - l}{\sqrt{(l - x^2) + p^2}}$$

Quindi $d'(x) > 0$ quando $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} > \dfrac{l - x}{\sqrt{(l - x^2) + p^2}}$

Se si elevano al quadrato entrambi i membri della precedente disequazione (entrambi sono termini positivi, si noti che $l - x \geq 0$ perchè $0 \leq x \leq l$) si scopre che $d(x)$ ha un minimo in corrispondenza di $x = \frac{l}{2}$. Pertanto angolo di incidenza e angolo di riflessione sono uguali: $\widehat{i} = \widehat{r}$.

Esercizio 1.50 (Rifrazione. Legge di Snell.)**.** *Un raggio luminoso si muove da P a Q attraversando due diversi mezzi; la velocità dei raggi luminosi è costante nei due mezzi, diciamo v_1 nel primo mezzo e v_2 nel secondo.*

Dimostrare che se vale il principio di tempo minimo allora vale l'uguaglianza

$$\frac{\sin \widehat{i}}{\sin \widehat{r'}} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(legge di Snell)}$$

dove $\widehat{i}$ e $\widehat{r'}$ sono gli angoli che la normale alla superficie di separazione dei due mezzi forma con il raggio riflesso e con quello rifratto.

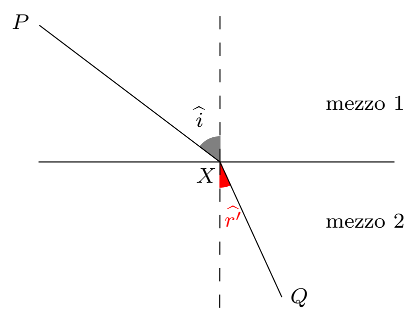


Figura 4

Soluzione.

Il problema consiste nel trovare gli angoli $\widehat{i}$, $\widehat{r'}$ in modo tale che la luce viaggi da P a Q nel minor tempo possibile. Ciò significa trovare x in modo tale che $PX + XQ$ sia minima.

Nel sistema di riferimento della figura 5, si ricava:

$$T(x) = \frac{\sqrt{p^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{q^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

La derivata di T rispetto a x è

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-(l - x)}{\sqrt{q^2 + (l - x)^2}}$$

Si osservi che $\sin \widehat{i} = \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}$ e $\sin \widehat{r'} = \frac{(l-x)}{\sqrt{q^2+(l-x)^2}}$, quindi la derivata T' è zero quando $\frac{\sin \widehat{i}}{v_1} = \frac{\sin \widehat{r'}}{v_2}$ (legge di Snell).

La derivata seconda

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \frac{p^2}{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \frac{q^2}{(q^2 + (l - x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

è sempre positiva e pertanto il valore di x che annulla T' è realmente un minimo.

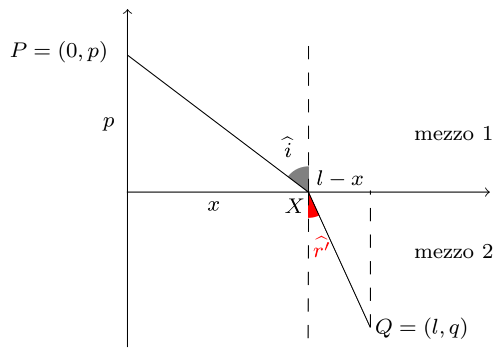


Figura 5: Legge della rifrazione: $\frac{\sin\widehat{i}}{\sin\widehat{r'}} = \frac{v_1}{v_2}$

1.5 Regole di de l'Hopital. Confronto di infiniti e di infinitesimi

Esercizio 1.51. *Utilizzando le* regole de L'Hopital, *calcolare i seguenti limiti*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^3 x}{e^x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{100}}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

Esercizio 1.52. *Si esponga la regola del marchese de L'Hopital (1661 - 1704) e la si applichi per dimostrare che*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{2014}}{3^x} = 0$$

1.6 Studio di funzioni

Esercizio 1.53. *Tracciare il grafico qualitativo delle seguenti funzioni*

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}$

Esercizio 1.54.

1. $\boxed{V}\boxed{F}$ *Se $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ e pari allora la sua derivata prima f' è dispari.*
2. $\boxed{V}\boxed{F}$ *La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2|\cos x|$ ha un minimo locale per $x = 0$.*
3. $\boxed{V}\boxed{F}$ *La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \sin x$ è derivabile in $x_0 = 0$.*
4. $\boxed{V}\boxed{F}$ *Se $(a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e $f'(x) > 0$ per ogni x in (a, b), allora f è iniettiva.*

2 Suggerimenti e risposte

Esercizio 1.1

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 3 \qquad f'(x_0) = 2.$
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1 \qquad f'(x_0) = 2x_0.$
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x \qquad f'(x_0) = \cos x_0.$
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x^2 \qquad f'(x_0) = 2x_0 \cos x_0^2.$

Esercizio 1.2 Posto $f(x) = x^3$ l'uguaglianza $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3$ assume la forma $f(x_0 + h) = f(x_0) + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3$.

Per h che tende a zero, la quantità $3x_0 h^2 + h^3$, divisa per h, tende a zero. Segue che f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Esercizio 1.3 Suggerimento: disegnare due circonferenze concentriche rispettivamente di raggio $r + h$ e r ...

Esercizio 1.4 Suggerimento: disegnare due sfere concentriche rispettivamente di raggio $r + h$ e r ...

Esercizio 1.5 Suggerimento: disegnare il quadrato di lato $l + h$. Allora $A(l + h) - A(l)$ è ...

Esercizio 1.7 La velocità del corpo all'istante t è $\dfrac{ds}{dt} = 3 + gt$. Per $t = 4$ si ottiene $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3 + 4g$. Quindi la velocità istantanea in $t = 4$ è circa 43 m/s.

Esercizio 1.8 $\dfrac{ds}{d\vartheta}$ è uguale al raggio della circonferenza, cioè $\dfrac{ds}{d\vartheta} = 2$.

Esercizio 1.10 $f(x) \sim 1 + \dfrac{1}{3}(x - 1)$

Esercizio 1.11 $f(x) \sim \ln 3 + \frac{4}{3}(x - 2)$

Esercizio 1.12 Approssimazione al primo ordine in $x_0 = 0$:

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$ $\quad f(x) \sim 1 + x/2$
2. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $\quad f(x) \sim 1 + x/3$
3. $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad f(x) \sim x$
4. $f(x) = \ln(1-2x)$ $\quad f(x) \sim -2x$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\quad f(x) \sim 1 + x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ $\quad f(x) \sim 1 + \frac{1}{2}x$
7. $f(x) = e^x$ $\quad f(x) \sim 1 + x$
8. $f(x) = e^{-x}$ $\quad f(x) \sim 1 - x$

Esercizio 1.13 $f(1+h) \sim f(1) + f'(1)h$. Posto $h = 0,02$ si ottiene $f(1+0,02) \sim 4 + 0,22 \cdot 0,02 \sim 4,0044$.

Esercizio 1.14 $f(1+h) \sim f(1) + f'(1)h$. Posto $h = 0,0003$ si ottiene $f(1,0003) \approx 1,4144$.

Esercizio 1.15 $\Delta V = 320\pi\ cm^3 \simeq 1005,3\ cm^3$.

Esercizio 1.18

a) $\dfrac{1}{x+2}$

b) $\dfrac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = (3x-2)^{-7/3}$; $f'(x) = -\dfrac{7}{(3x-2)^{-10/3}}$.

d) $2^x \ln 2$ (dove ln designa il logaritmo in base e).

e) $f'(x) = e^{x^2} 2x(\ln(1+x^2) + \dfrac{1}{x^2+1})$

f) $f'(x) = e^{\sin x^3}(\cos x^3)(3x^2)$

Esercizio 1.28 $y = \sin x$ e $\left(\sin^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\cos x}$ (teorema della derivata della funzione inversa). Poiché $\cos x > 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si ha: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$. Pertanto $\left(\sin^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Esercizio 1.29 $y = \exp(x)$ e $\left(\exp^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\exp(x)} = \dfrac{1}{y}$.

Esercizio 1.30 $f(x) = |x|^x = e^{x \ln |x|}$. Pertanto, utilizzando la regola della derivata della funzione composta, si ottiene

$$f'(x) = (\ln |x| + 1)e^{x \ln |x|}$$

Esercizio 1.31 La funzione esponenziale π^x (con base maggiore di 1) è definita per ogni x reale mentre la funzione potenza x^π è definita solo se la base è positiva, quindi il dominio di f è

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \pi^x \ln \pi - \pi x^{\pi - 1}$$

Per $x = \pi$ si ottiene

$$f'(\pi) = \pi^\pi (\ln \pi - 1)$$

Il numero $\ln \pi - 1$ è positivo, quindi $f'(\pi) > 0$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \pi^x \ln^2 \pi - \pi(\pi - 1)x^{\pi - 2}$$

Per $x = \pi$ si ottiene

$$\begin{aligned} f''(\pi) &= \pi^\pi \ln^2 \pi - \pi(\pi - 1)\pi^{\pi - 2} \\ &= \pi^{\pi - 1}(\pi \ln^2 \pi - \pi + 1) \\ &= \pi^{\pi - 1}(\pi(\ln^2 \pi - 1) + 1) \end{aligned}$$

Il numero $\ln^2 \pi - 1$ è positivo e quindi $f''(\pi) > 0$.

Esercizio 1.34 La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8$ è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$ e derivabile sull'intervallo aperto $(-2, 2)$. Per il teorema di Lagrange, esiste almeno un numero $\gamma \in (-2, 2)$ per il quale si ha

$$f(2) - f(-2) = 4f'(\gamma)$$

ovvero

$$f'(\gamma) = 4 \tag{2.1}$$

I numeri γ cercati sono le soluzioni dell'equazione $3\gamma^2 = 4$, cioè $\gamma = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Per tali punti la retta tangente al grafico della cubica $y = x^3 + 8$ è parallela alla corda di estremi $(-2, 0)$, $(2, 16)$.

Esercizio 1.35 Il dominio della funzione è

$$D = D_1 \cup D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

Per ogni $x \in D$, f è derivabile e risulta $f'(x) = 0$. Segue che f è costante sia su D_1 che su D_2. Per trovare le due costanti basta calcolare il valore della funzione in due punti x_1, x_2, dove x_1 è un punto qualsiasi di D_1, e x_2 di D_2. Per esempio per $x = -\sqrt{3}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\arctan(-\sqrt{3}) - \arctan -\tfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} &= -\tfrac{\pi}{3} - \arctan \tfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2} \\
&= -\tfrac{\pi}{3} - \arctan(2+\sqrt{3}) \\
&= -\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{5}{12}\pi \\
&= -\tfrac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

mentre, per $x = 0$, si ha:

$$\arctan 0 - \arctan(-1) = \tfrac{\pi}{4}$$

Riassumendo, la funzione f è definita e derivabile in $D = D_1 \cup D_2$, inoltre per ogni $x \in D$ risulta $f'(x) = 0$. L'insieme D è l'unione disgiunta di due intervalli, pertanto D non è connesso. Segue che la funzione f è costante in D_1: $f(x) = -\frac{3}{4}\pi$ per ogni $x \in D_1$ e f è costante in D_2: $f(x) = \frac{\pi}{4}$ per ogni $x \in D_2$. Poichè si tratta di due costanti diverse f non è costante su D.

Esercizio 1.36

CASO 1: $0 < x < 1$ la disuguaglianza è vera perchè $\ln x < 0$ e $x + 1 > 0$.

CASO 2: $x \geq 1$. Nell'intervallo $[1, d]$, con $d > 1$, la funzione $f(x) = \ln x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Quindi si ha:

$$\ln x - \ln 1 = f'(c)(x - 1)$$

$$\ln x = f'(c)(x - 1)$$

con $c \in \mathbb{R}$ e $1 < c < d$.

Poichè $f'(c) = \frac{1}{c} < 1$ si ottiene:

$$\ln x < x - 1 < x + 1$$

Per l'arbitrarietà con cui è stato scelto d si ha la tesi.

Esercizio 1.37 Dai dati del problema si deduce che in *tre* diversi istanti di tempo le due auto sono affiancate. In altre parole, indicate con $S_A(t)$ e $S_B(t)$ le distanze percorse rispettivamente dall'auto A e dall'auto B, per tre diversi istanti di tempo t_1, t_2, t_3 si ha: $\big(S_A - S_B\big)(t_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Il teorema di Rolle, applicato alle funzioni $[t_1, t_2] \xrightarrow{S_A - S_B} \mathbb{R}$ e $[t_2, t_3] \xrightarrow{S_A - S_B} \mathbb{R}$, assicura l'esistenza di due istanti di tempo σ e τ con $t_1 < \sigma < t_2 < \tau < t_3$ per i quali risulta

$$\big(S_A - S_B\big)'(\sigma) = 0 \qquad \text{e} \qquad \big(S_A - S_B\big)'(\tau) = 0$$

Applicando infine il teorema di Rolle alla funzione $[\sigma, \tau] \xrightarrow{(S_A - S_B)'} \mathbb{R}$ si ottiene che in almeno un istante di tempo κ, $\sigma < \kappa < \tau$ deve essere $\big(S_A - S_B\big)''(\kappa) = 0$.

Massimi e minimi

Esercizio 1.41 n^2.

Esercizio 1.42 Il rettangolo di area massima è il quadrato.

Esercizio 1.43 $V_{cilindro} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} V_{sfera}$.

Esercizio 1.44 Il cilindro di volume massimo è quello equilatero.

Esercizio 1.45 L'area del rettangolo inscritto è $2ab$.

Esercizio 1.47 Dall'ipotesi $P(x_0) = P(-x_0)$ si ottiene:

$$ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e = ax_0^4 - bx_0^3 + cx_0^2 - dx_0 + e$$

ossia

$$2x_0(bx_0^2 + d) = 0$$

Poichè $x_0 \neq 0$, si ricava

$$bx_0^2 + d = 0 \tag{2.2}$$

Inoltre, per ipotesi, x_0 e $-x_0$ sono due punti stazionari, cioè $P'(x_0) = P'(-x_0) = 0$. Quindi

$$\begin{cases} P'(x_0) &= \quad 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d &= 0 \\ P'(-x_0) &= -4ax_0^3 + 3bx_0^2 - 2cx_0 + d &= 0 \end{cases}$$

Sommando tra loro le due equazioni del sistema si ottiene:

$$3bx_0^2 + d = 0 \tag{2.3}$$

Infine, dalle uguaglianze (2.2) e (2.3) si ricava $b = d = 0$. Il polinomio

$$P(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

è pari (la verifica è immediata).

Esercizio 1.48

Primo metodo.

Sia $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Se si esegue la traslazione di equazione

$$\begin{cases} X &= x - \frac{5}{2} \\ Y &= y \end{cases}$$

il polinomio $P(x)$ si trasforma nel polinomio (di quarto grado) $Q(X)$; il trasformato del punto $(1,0)$ è $(-\frac{3}{2},0)$, il trasformato di $(2,0)$ è $(-\frac{1}{2},0)$ e infine il trasformato di $(3,0)$ è $(\frac{1}{2},0)$.

Riassumendo, il polinomio $Q(X)$ assume massimo assoluto nei punti $X = \pm\frac{1}{2}$, tali punti sono stazionari: $Q'(\pm\frac{1}{2}) = 0$. Inoltre $Q(-\frac{1}{2}) = Q(+\frac{1}{2}) = 3$. Allora, si veda l'esercizio precedente, il grafico di $Q(X)$ (nel sistema di coordinate X, Y) è simmetrico rispetto all'asse Y. Segue che il grafico di $P(x)$ è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{5}{2}$.

$P(1) = 0$ per ipotesi e il simmetrico di 1 rispetto alla retta di equazione $x = \frac{5}{2}$ è 4. Quindi $P(4) = 0$

Secondo metodo. Il grafico del polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ha, in $x = 2$ e $x = 3$, retta tangente di equazione $y = 3$. Pertanto $P(x)$ ha la forma seguente:

$$P(x) - 3 = k(x-2)^2(x-3)^2 \tag{2.4}$$

dove k è un numero reale. Da (2.4), per $x = 1$, si ottiene

$$P(1) - 3 = k \cdot 1 \cdot 4$$

Essendo, per ipotesi, $P(1) = 0$ si ricava $k = -\frac{3}{4}$. Quindi il polinomio $P(x)$ è

$$P(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2(x-3)^2 + 3$$

È immediato verificare che $P(1) = P(4) = 0$.

Esercizio 1.51

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^3 x}{e^x} = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

Esercizio 1.53

1. Dominio di f: $(-\infty, +\infty)$.

   Intersezione del grafico di f con l'asse y: $(0, 1)$.

   Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(-1, 0)$.

   Segno di f: $f(x) > 0$ per $x > -1$.

   Limiti alla frontiera del dominio di f: $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0^+$.

   Derivata prima: $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$.

   Dominio di f': $(-\infty, +\infty)$.

   Segno di f': $f'(x) > 0$ per $x < 0$.

   Massimi e minimi locali: $(0, 1)$ massimo locale.

   Derivata seconda: $f''(x) = \frac{(x-1)}{e^x}$.

   Punti di flesso: $(1, \frac{2}{e})$.

2. $\left[f(x) = \frac{x+1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}\right]$.

   Dominio di f: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(-1, 0)$

   Segno di f: $f(x) > 0$ per $x > -1$.

   Limiti agli estremi del dominio di f: $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

   Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4} e^{-\frac{2}{x}}$.

   Dominio di f': $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   Segno di f': $f'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < +\sqrt{2}$.

   Massimi e minimi locali: f ha un minimo locale in corrispondenza di $x = -\sqrt{2}$, un massimo locale in corrispondenza di $x = +\sqrt{2}$.

   Derivata seconda: $f''(x) = 2\frac{(x^3-x^2-4x+2)}{x^6} e^{-\frac{2}{x}}$.

   Punti di flesso: l'equazione $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$ ha tre radici reali (per convincersene tracciare il grafico di $y = x^3 - x^2 - 4x + 2$), di conseguenza f ha tre punti di flesso.

3. $\left[f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}\right]$

   Dominio di f: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

   Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(1, 0)$

   Segno di f: $f(x) \geq 0$ per $x > 0$.

   Limiti agli estremi del dominio di f: $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{3-x}{3x^2\sqrt[3]{x-1}}$.

Dominio di f': $(-\infty, 0) \cup (0, +1) \cup (+1, +\infty)$.

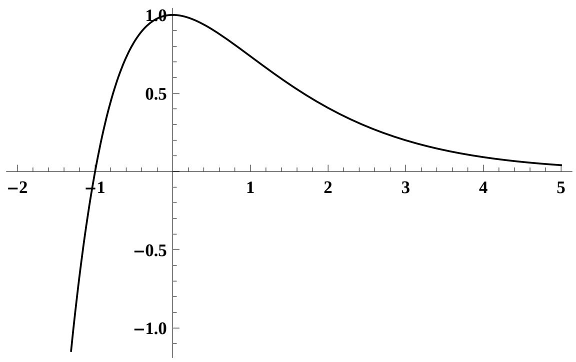
Segno di f': $f'(x) > 0$ per $1 < x < 3$.

Massimi e minimi locali: f ha un minimo locale in $(1, 0)$ e un massimo locale in $(3, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$.

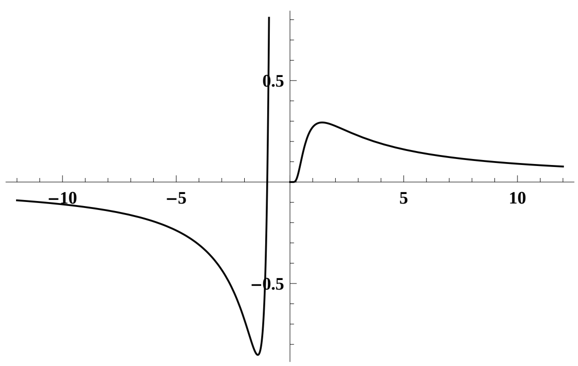
Analisi dei punti di non derivabilità : f non è derivabile in $x = 1$; si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$. Quindi nel punto $(1, 0)$ la funzione presenta una cuspide.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2(2x^2 - 12x + 9)}{9x^3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

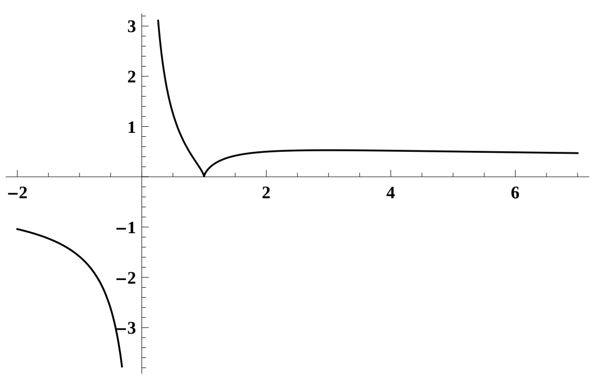
Punti di flesso: la funzione presenta due punti di flesso in corrispondenza di $x = \frac{6-\sqrt{18}}{2}$ e di $x = \frac{6+\sqrt{18}}{2}$.



$$f(x) = \frac{x+1}{e^x}$$



$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}$$



$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}$$