Funzioni continue

Mauro Saita
e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Ottobre 2014

Indice

1 Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle $n-$uple ordinate di numeri reali, cioè

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ \text{con } i = 1, 2, ..., n\}$$

Per $n = 3$ si ottine lo spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ \text{con } i = 1, 2, 3\}$, per $n = 2$ si ha il piano ordinario $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ \text{con } i = 1, 2\}$ e infine, per $n = 1$, si ha la retta reale $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}\}$.

In $\mathbb{R}^n$ è definita la seguente distanza, detta *metrica euclidea standard*:

Definizione 1.1 (Distanza in $\mathbb{R}^n$)**.** *Per ogni* $X = (x_1, ..., x_n)$*,* $Y = (y_1, ..., y_n)$ *in* $\mathbb{R}^n$*, si chiama distanza di* X *da* Y *e si scrive* $\text{dist}(X, Y)$ *il numero reale non negativo*

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{1.1}$$

In $\mathbb{R}^2$ la distanza tra $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ è (teorema di Pitagora)

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

invece in $\mathbb{R}$ la distanza tra $X = (x)$ e $Y = (y)$ è

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| = |x - y|$$

Con la distanza definita in (1.1), $\mathbb{R}^n$ assume una struttura di *spazio metrico*[1] , detto *spazio euclideo standard.*

Definizione 1.2 (Sfera aperta)**.** *Sia* $\mathbb{R}^n$ *lo spazio euclideo standard. Fissato un punto* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *e un numero reale* $r > 0$*, si chiama* sfera aperta *di centro* X_0 *e raggio* r *l'insieme* $S(X_0; r)$ *dei punti di* $\mathbb{R}^n$ *la cui distanza dal centro* X_0 *è minore di* r*:*

$$S(X_0; r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(X, X_0) < r\}$$

[1]In termini più precisi uno *spazio metrico* (M, dist) consiste in un insieme M e in una funzione

$$M \times M \xrightarrow{\text{dist}} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

detta funzione *distanza* in M - oppure *metrica* in M - che soddisfa le proprietà seguenti:

- Per ogni P, Q, in M,
$$\text{dist}(P, Q) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad P = Q$$
- (Simmetria) Per ogni P, Q, in M,
$$\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(Q, P)$$
- (Disuguaglianza triangolare) Per ogni P, Q, R in M,
$$\text{dist}(P, Q) \leq \text{dist}(P, R) + \text{dist}(R, Q)$$

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *aperto in* $\mathbb{R}^n$, se per ogni punto x in A esiste una sfera aperta di $\mathbb{R}^n$, centrata in x e tutta contenuta in A. Un intorno di X_0 è un insieme contenente una sfera aperta centrata in X_0.

Definizione 1.3 (Continuità in termini di intorni.)**.** *Una funzione*

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

da $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$ *si dice* continua nel punto X_0 *in* $\mathbb{R}^n$*, se per ogni sfera aperta* W *centrata in* $f(X_0)$ *esiste una sfera aperta* U *centrata in* X_0 *tale che* $f(U) \subseteq W$*. In altri termini* $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ *si dice* continua nel punto X_0 *in* $\mathbb{R}^n$ *se si verica la seguente proprietà*

$$\forall S(f(X_0);\varepsilon) \quad \exists S(X_0;\delta) \quad \textit{tale che} \quad \forall x \in S(X_0;\delta) \quad \textit{si ha} \quad f(x) \in S(f(X_0);\varepsilon)$$

L'applicazione $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ *si dice* continua *se è continua in ogni punto di* $\mathbb{R}^n$*.*

A parole: la funzione $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ è continua nel punto X_0 in $\mathbb{R}^n$ se, spostando di poco il punto X dal punto X_0, il punto $f(X)$ si sposta di poco quanto si vuole dal punto $f(X_0)$.

1.1 Funzioni reali continue

In questa sezione si riformula la definizione di continuità nel caso di una funzione reale di variabile reale, cioè di una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (o di una funzione $A \xrightarrow{f} B$, dove A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, con la metrica indotta). Bisogna ricordare che la distanza tra due punti x, y in $\mathbb{R}$ è data da $|x - y|$ e che, di conseguenza, la sfera aperta di centro il numero c e raggio r è l'intervallo aperto di centro c e semi-ampiezza r. La definizione di continuità si trascrive allora nel modo seguente:

Definizione 1.4 (Definizione ε-δ di continuità)**.** *La funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se si verifica la seguente proprietà :*
per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, per tutti gli* $x \in \mathbb{R}$*, se* $|x - x_0| < \delta$ *allora*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

In termini più concisi, una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se la seguente condizione è soddisfatta:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In fatti, la condizione scritta sopra dice che, comunque si fissi una sfera (nel codominio di f)

$$W = \{y \in \mathbb{R} \mid \quad |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

centrata in $f(x_0)$ (di raggio ε), esiste una sfera (nel dominio di f)

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x - x_0| < \delta\}$$

centrata in x_0 (di raggio δ), tale che $f(U) \subset W$.

Siano D e C due soottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Una funzione $D \xrightarrow{f} C$ si dice *continua* se è continua in ogni punto del suo dominio D.

Esercizio 1.5. *La funzione identità $\mathbb{R} \xrightarrow{I} \mathbb{R}$ (per ogni x, $I(x) = x$) è continua.*

Esercizio 1.6. *Ogni funzione costante è continua. (Una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è si dice costante se esiste un numero k tale che, per ogni x, $f(x) = k$).*

Esercizio 1.7. *La funzione "reciproco" $\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, che manda ogni $x \neq 0$ in $1/x$, è continua.*

Esercizio 1.8. *La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua.*

1.2 Prime proprietà delle funzioni continue

Vediamo ora le prime proprietà delle funzioni continue.

Teorema 1.9 (Permanenza del segno)**.** *Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e positiva in x_0:*

$$f(x_0) > 0$$

Allora esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}$ di x_0 in cui la funzione f si mantiene positiva:

$$\forall x \in U \qquad f(x) > 0$$

Dimostrazione. Poiché $f(x_0)$ è maggiore di zero, ogni intorno sufficientemente piccolo di $f(x_0)$ contiene solo numeri positivi. Precisamente, fissato un numero positivo $\varepsilon < f(x_0)$, l'intorno aperto $W = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ di $f(x_0)$ contiene soltanto numeri positivi (fare una figura). Fissato un tale W, poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset W$. Siccome in W ci sono solo numeri positivi, si ha $f(x) > 0$, per ogni $x \in U$. ∎

Valgono inoltre i seguenti teoremi.

Teorema 1.10 (Somma di funzioni continue)**.** *La somma di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in x_0, è continua in x_0, cioè*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{f+g} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 1.11 (Prodotto di funzioni continue)**.** *Il prodotto di due funzioni reali di variabile reale, entrambe continue in x_0, è continua in x_0, cioè*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 1.12 (Quoziente di funzioni continue)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue a valori reali, con $g(x) \neq 0$ per ogni x. Allora il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una funzione continua.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continue in } x_0 \implies \mathbb{R} \xrightarrow{f/g} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Teorema 1.13 (Composizione di funzioni continue)**.** *La funzione composta di due funzioni continue è continua.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0 \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ continua in } y_0 = f(x_0) \implies \mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R} \text{ continua in } x_0$$

Di quest'ultimo teorema si darà una dimostrazione più avanti.

1.3 Funzioni continue e successioni

In questo paragrafo si mostra che la definizione di funzione continua si può esprimere anche in termini di successioni. Vale infatti il seguente teorema

Teorema 1.14 (Continuità per successioni)**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di D. I due seguenti fatti sono allora equivalenti:*

(1) *f è continua in $x_0 \in D$.*

(2) *per ogni successione x_n, $n \in \mathbb{N}$, di elementi di D,*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

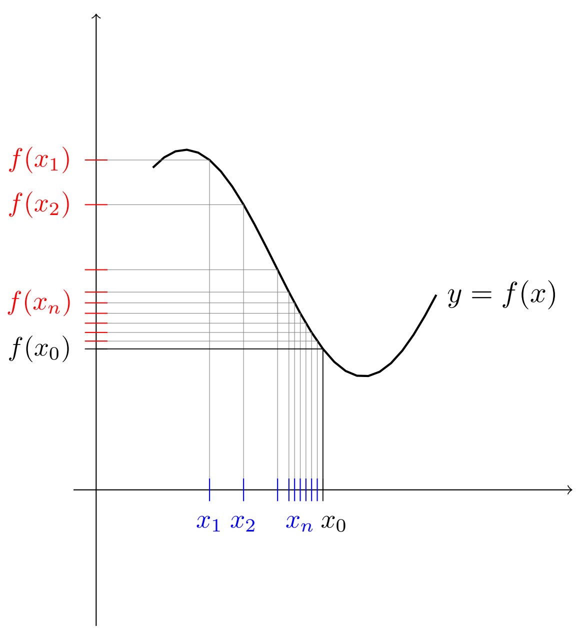

Fig.1 - La funzione $y = f(x)$ è continua in x_0 se e solo se vale la seguente proprietà : $x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

La dimostrazione di questo teorema non è in programma perchè un pò difficile. Tuttavia è istruttiva, costringe a riflettere sulla definizione di continuità e su cosa significhi negare che una funzione sia continua in un punto. Chi volesse studiarla, accettando la sfida, può decidere di esporla durante le interrogazioni orali.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2). Dimostriamo che la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$, ad arbitrio. Per la continuità di f in x_0, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$ soddisfacente $|x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ma per n sufficientemente grande, tutti gli elementi x_n appartengono all'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (perché $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$). Pertanto, per tutti gli n sufficientemente grandi, si ha $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Questo dimostra che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. A parole: le funzioni continue commutano con 'lim'.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo, per assurdo, che f non sia continua in x_0. Affermare che f non è continua in x_0 significa che esiste un numero positivo ε tale che, per ogni δ, esiste un punto $x \in D$ tale che $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$. Scegliamo

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1/2, \quad \delta_3 = 1/3, ..., \delta_n = 1/n, ...$$

Per ogni δ_n c'è un punto x_n per il quale $|x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Dunque la successione x_n converge a x_0, ma la successione $f(x_n)$ non converge a $f(x_0)$. Questo fatto contraddice l'ipotesi. ∎

2 Proprietà delle funzioni reali continue su un intervallo

In questa sezione si considerano soltanto *funzioni reali di variabile reale*, ossia funzioni il cui dominio e il cui codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

2.1 Teorema degli zeri

Teorema 2.1 (Teorema degli Zeri). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ e continua. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti. (Vale a dire, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema degli zeri consiste nel presentare un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla.

Per fissare le idee si supponga $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e si consideri il punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (si è trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, si scelga tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, si scelga l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & se \quad f(c) > 0 \\ \\ [c, b] & se \quad f(c) < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Si operi ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui si è operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti si scelga tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra. Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso si è trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k. In questo caso si ottiene una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

con le due seguenti proprietà:

- nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k ($0 \leq k \leq n$) abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

- gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

Si è dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n:

$$\lim_{n \to +\infty} i_n = \alpha = \lim_{n \to +\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(i_n) = f(\alpha) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} f(j_n) = f(\alpha)$$

Poiché $f(i_n) < 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(i_n) \leq 0$$

Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poichè le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, si ha $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f. ■

Quante iterazioni?

Al passo m l'intervallo di approssimazione della radice è $[i_m, j_m]$ e l'ampiezza di tale intervallo è $|j_m - i_m| = \dfrac{b-a}{2^m}$. *Quante iterazioni sono necessarie se si vuole guadagnare una cifra significativa nell'accuratezza della approssimazione della radice?*

Per fare ciò occorre ridurre l'intervallo $[i_m, j_m]$ di $\dfrac{1}{10}$. In altre parole, bisogna determinare un intervallo $[i_k, j_k]$ in modo tale che

$$|j_k - i_k| = \frac{1}{10}|j_m - i_m| \tag{2.2}$$

ossia

$$\frac{b-a}{2^k} = \frac{1}{10}\frac{b-a}{2^m} \tag{2.3}$$

Dall'uguaglianza (2.3) si ricava: $2^{k-m} = 10$. Pertanto, sono necessarie

$$k - m = \log_2 10 \sim 3,32 \texttt{ bisezioni} \tag{2.4}$$

Dai calcoli appena fatti segue che, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri, il metodo di bisezione permette di approssimare la radice c dell'equazione $f(x) = 0$ con qualunque grado di precisione si desideri. Tuttavia, per farlo, può essere necessario eseguire un numero di iterazioni molto elevato. In altre parole, *il metodo di bisezione è un algoritmo di sicura, ma lenta convergenza.*

Punti fissi di una funzione.

Si ricordi che $x \in [a, b]$ è un *punto fisso* della funzione $[a, b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ se soddisfa l'equazione $g(x) = x$

Il problema della ricerca di punti fissi si può sempre trasformare in un problema equivalente di ricerca degli zeri e viceversa. Più precisamente, l'equazione

$$g(x) = x \tag{2.5}$$

è equivalente a

$$g(x) - x = 0 \tag{2.6}$$

Allora, posto $f(x) = g(x) - x$, ricercare i punti fissi della funzione g equivale a ricercare gli zeri della funzione f

$$f(x) = 0 \tag{2.7}$$

Il seguente teorema esprime alcune condizioni che garantiscono, per una certa funzione g, l'esistenza di almeno un punto fisso.

Teorema 2.2. *Se $[a, b] \xrightarrow{g} [a, b]$ è una funzione continua in $[a, b]$ allora l'equazione $g(x) = x$ ammette almeno una soluzione.*

Dimostrazione.

Se $g(a) = a$ o $g(b) = b$ il teorema è dimostrato, altrimenti si ha $g(a) - a > 0$ e $g(b) - b < 0$. La funzione $g(x) - x$ risulta definita e continua in $[a, b]$ e, pertanto, il *teorema degli zeri* assicura che l'equazione $g(x) - x = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[a, b]$. ∎

Si noti che il teorema (2.2) garantisce l'*esistenza* ma non l'*unicità* del punto fisso.

Esercizio 2.3. *Tracciare il grafico di una funzione $[a, b] \xrightarrow{g} [a, b]$ che abbia più di un punto fisso in $[a, b]$.*

2.2 Teorema dei valori intermedi

Si ricordi che, per definizione, un *intervallo* di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di uno dei seguenti tipi (a, b sono numeri reali, $a \leq b$):

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervallo aperto);
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, (intervallo chiuso e limitato, o intervallo compatto);
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, (semiretta aperta);
6. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, (semiretta chiusa);
7. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, (semiretta aperta);
8. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, (semiretta chiusa);
9. L'intera retta reale $\mathbb{R}$.

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se soddisfa la proprietà seguente, detta di convessità*:*

Se x, y, con $x < y$, sono due punti appartenenti a I e w è un qualunque punto compreso tra x e y (cioè soddisfacente $x < w < y$), allora anche w appartiene a I.

Teorema 2.4 (Teorema dei valori intermedi)**.** . *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Il terema si può enunciare anche nel modo seguente:

Teorema 2.5 (L'immagine continua di un intervallo è un intervallo)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

In breve: *Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli.*

Questo teorema generalizza il Teorema degli Zeri 2.1.

Dimostrazione. Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Si deve dimostrare che $w \in f(I)$. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - w$. Tale funzione è ovviamente continua sull'intervallo $[a, b]$ e si ha:

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \qquad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \tag{2.8}$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri 2.1 sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. ∎

Osservazione Non si deve pensare che una funzione, definita su un intervallo, che per ogni coppia di punti x_1, x_2 assuma tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sia necessariamente continua. Un controesempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Infatti questa funzione, definita su tutto $\mathbb{R}$, non è continua in 0 (comunque si definisca il suo valore in 0). Eppure, per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

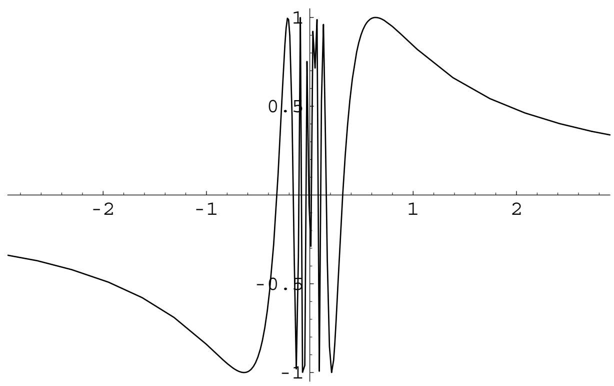

Figura 1: Per ogni $x_1 < x_2$ assume tutti i valori tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$, ma non è continua

2.3 Continuità della funzione inversa

Il problema che qui si vuole affrontare è il seguente

Se una funzione reale di variabile reale (cioè una funzione $A \xrightarrow{f} B$, con $A, B \subset \mathbb{R}$) è continua e invertibile, la sua funzione inversa è necessariamente continua?

Una funzione invertibile, continua e con inversa continua, si chiama *omeomorfismo*. Quindi il problema si può formulare in questo modo: *Una funzione invertibile e continua è necessariamente un omeomorfismo?*

In generale, la risposta è no.

Ad esempio, si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$ così definita: il dominio di f è $A = [0,1) \cup [2,3]$, il codominio di f è $B = [0,2]$ e, per ogni x del dominio,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Questa funzione è continua sul suo dominio A, perché è continua in ogni punto di A. Inoltre, si vede facilmente che è invertibile. Ma la sua inversa $B \xrightarrow{f^{-1}} A$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ y + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(il cui dominio è $B = [0,2]$ e il cui codominio è $A = [0,1) \cup [2,3]$) non è continua nel punto 1.

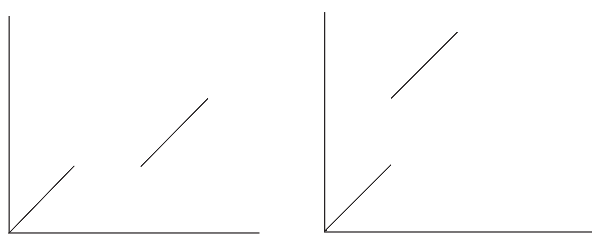

Figura 2: La funzione f (a sinistra) con dominio $[0,1) \cup [2,3]$ e codominio $[0,2]$ è continua e invertibile, ma la sua inversa f^{-1} (a destra) non è continua nel punto 1.

Se però f ha valori reali e il suo dominio è un *intervallo* di $\mathbb{R}$, oppure è un *compatto* di $\mathbb{R}$ (cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato), allora la funzione inversa f^{-1} è anch'essa continua.

Come prima cosa si consideri il caso delle funzioni continue, a valori reali, invertibili su un intervallo.

Teorema 2.6 (Continuità della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione continua definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$. Se la funzione $I \xrightarrow{f} f(I)$ è invertibile, allora la funzione inversa $f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$ è continua.*

Prima di dimostrare il teorema 2.6, vediamo meglio come sono fatte le funzioni che sono continue su un intervallo e invertibili. È interessante notare che devono essere strettamente monotone, cioè crescenti oppure decrescenti:

Lemma 2.1. *Ogni funzione reale f continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e invertibile è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Si supponga che f non sia strettamente monotona. Negare che f sia strettamente monotona equivale ad affermare che esistono tre punti x_1, x_2, x_3 in I tali che $x_1 < x_2 < x_3$ e per i quali vale una delle seguenti coppie di disuguaglianze:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \geq f(x_3)$$

oppure

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \leq f(x_3)$$

Si supponga che si verifichi la prima coppia di disuguaglianze. Non si può avere $f(x_1) = f(x_2)$ e nemmeno $f(x_2) = f(x_3)$, perché altrimenti f non sarebbe iniettiva. Sia h il massimo tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$. (Nella figura, $h = f(x_3)$). Poiché f è continua, i valori w che soddisfano $h < w < f(x_2)$ vengono allora assunti dalla funzione f almeno due volte: una nell'intervallo (x_1, x_2) e un'altra nell'intervallo (x_2, x_3). Questo contrasta con il fatto che f è iniettiva. Analogamente si procede nel caso valga la seconda coppia di disuguaglianze. ∎

Qui di seguito si riporta la dimostrazione del teorema dell'inversa continua.

Dimostrazione. (del teorema 2.6). Sia f continua e invertibile su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Allora la sua immagine $I' = f(I)$ è un intervallo.

Per il lemma precedente f è monotona; diciamo crescente, per fissare le idee. Quindi anche la funzione inversa $I' \xrightarrow{f^{-1}} I$ sarà crescente. Si vuole dimostrare che f^{-1} è continua in ogni punto di I'. Si fissi dapprima un punto w' che sia interno a I'. Il punto $w = f^{-1}(w')$ deve essere allora interno a I. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario, ma sufficientemente piccolo perché l'intervallino $I_\varepsilon = (w - \varepsilon, w + \varepsilon)$ sia tutto contenuto in I'.

Poiché f è crescente,

$$w - \varepsilon < w < w + \varepsilon \implies f(w - \varepsilon) < w' < f(w + \varepsilon) \tag{2.10}$$

e quindi l'intervallino $I'_\varepsilon = (f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ è un intorno di w'. Poiché anche la funzione f^{-1} è crescente,

$$f(w - \varepsilon) < y < f(w + \varepsilon) \implies w - \varepsilon < f^{-1}(y) < w + \varepsilon \tag{2.11}$$

Questo significa che ogni punto y dell'intorno $(f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ di w' viene mandato in $I_\varepsilon = (w - \varepsilon, w + \varepsilon)$.

Riassumendo: si è dimostrato che, fissato ad arbitrio un intorno $(w-\varepsilon, w+\varepsilon)$ di $w = f^{-1}(w')$, esiste un intorno $(f(w - \varepsilon), f(w + \varepsilon))$ di w' che viene trasformato da f^{-1} in $(w - \varepsilon, w + \varepsilon)$. Per la definizione stessa di continuità, si conclude che f^{-1} è continua in w'.

Il ragionamento si modifica in modo ovvio nel caso il punto w' sia un estremo di I'. Basterà considerare intorni soltanto sinistri o destri. Si supponga ad esempio che w' sia l'estremo superiore di I'. Allora, poiché f^{-1} è crescente, anche $w = f^{-1}(w')$ è l'estremo superiore dell'intervallo I'. Preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, si consideri l'intorno sinistro $(w - \varepsilon, w]$ di w. La funzione f^{-1}, essendo crescente, trasforma l'intorno sinistro $(f(w - \varepsilon), w']$ di w' nell'intorno sinistro $(w - \varepsilon, w]$ di w. Questo prova che f^{-1} è continua in w'. ∎

Esempi. In questi esempi si suppone che siano già conosciute le definizioni delle funzioni $\sin, \cos$ e $\tan$, e che si sappia che sono funzioni continue.

1) La funzione

$$[-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

è strettamente crescente (quindi iniettiva) e suriettiva. Dunque è invertibile. Inoltre la funzione $\sin$ è continua. Quindi, per il teorema sulla continuità della funzione inversa, anche la sua inversa

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\pi/2, \pi/2]$$

detta *arcoseno*, è continua.

2) La funzione

$$[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$

è strettamente decrescente (quindi iniettiva) e suriettiva. Dunque è invertibile. Per il teorema sulla continuità della funzione inversa, la sua inversa

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\pi/2, \pi/2]$$

detta *arcoseno*, è continua.

3) In modo analogo, la funzione

$$(-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$$

è invertibile e continua. Quindi la funzione inversa

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan} (-\pi/2, \pi/2)$$

(detta *arcotangente*) è continua.

4) La funzione elevamento a quadrato

$$[0, +\infty) \xrightarrow{(-)^2} [0, +\infty), \qquad f(x) = x^2$$

è continua su un intervallo e invertibile. Dunque, per il teorema sulla continuità della funzione inversa, la sua inversa, che è la funzione radice quadrata

$$[0, +\infty) \xrightarrow{\sqrt{(-)}} [0, +\infty), \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

è continua.

Nello stesso modo si dimostra la continuità di tutte le funzioni $\sqrt[n]{(-)}$ (radici n-esime).

2.4 Teorema di Weierstrass

Ora enunciamo e dimostriamo il teorema di Weierstrass in un caso particolare: quello di funzioni reali definite su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato (intervallo compatto). In realtà, il teorema di Weierstrass vale, più in generale, per funzioni continue, a valori reali, definite su un qualunque compatto (chiuso e limitato).

Teorema 2.7. *Una funzione* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato)* $I = [a,b]$ *è limitata. Inoltre esistono nell'intervallo* I *un punto nel quale la funzione assume il suo valore massimo e un punto nel quale la funzione assume il suo valore minimo.*

In termini più espliciti, la tesi afferma che esistono in $[a,b]$ (almeno) un punto p e (almeno) un punto q per i quali si ha, per ogni $x \in [a,b]$,

$$f(p) \leq f(x) \tag{2.12}$$

$$f(x) \leq f(q) \tag{2.13}$$

Si osservi anzitutto che se f fosse definita e continua su un intervallo non chiuso o su un intervallo non limitato, la tesi non sarebbe più vera. Ad esempio, si consideri la funzione $f(x) = 1/x$ sull'intervallo non chiuso $(0,1]$ o la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo non limitato $[0,+\infty)$.

Dimostrazione. (Teorema di Weierstrass)[2]. Qui si dimostra che f assume in $[a,b]$ un valore massimo (in modo analogo si procede per il minimo). Si denoti con L l'estremo superiore di f su $[a,b]$:

$$L = \sup_{[a,b]} f = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

A priori, non si può escludere che L sia $+\infty$; ma la dimostrazione ci dirà che L è un numero reale - cioè che f è superiormente limitata - e che esiste un punto $q \in [a,b]$ nel quale $f(q) = L$. Si divida l'intervallo $[a,b]$ in due intervalli mediante il punto medio c. È ovvio che in almeno uno dei due intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ l'estremo superiore di f deve essere ancora L. (Per dimostrarlo, si ponga

$$L_1 = \sup_{[a,c]} f \qquad \text{e} \qquad L_2 = \sup_{[c,b]} f$$

Si ha $L_1 \leq L$ e $L_2 \leq L$. Si supponga che per assurdo $L_1 < L$ e $L_2 < L$. Da

$$f(x) \leq L_1 \;\text{ per ogni } x \in [a,c] \qquad\qquad f(x) \leq L_2 \;\text{ per ogni } x \in [c,b]$$

si ricava che, per ogni $x \in [a,b]$,

$$f(x) \leq \max\{L_1, L_2\} < L$$

contro l'ipotesi che L sia la *minima* limitazione superiore). Si indichi con $I_1 = [a_1, b_1]$ quello dei due intervalli in cui l'estremo superiore di f è uguale a L (o uno qualunque dei due, se entrambi soddisfano questa condizione) e si iteri il procedimento. Si ottiene in questo modo una successione $I_n = [a_n, b_n]$ di intervalli compatti inscatolati, su ciascuno dei quali l'estremo superiore di f è L, e le cui ampiezze $(b-a)/2^n$ tendono a zero. Per il teorema degli intervalli compatti inscatolati, la successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ definisce un numero reale q che appartiene all'intervallo $[a,b]$ (l'unico punto che appartiene a tutti gli intervallini I_n). Si tratta ora di dimostrare che nel punto q la funzione f assume il suo valore massimo.

Poiché f è continua in q, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli $x \in [q-\delta, q+\delta]$ si ha $|f(x) - f(q)| < \varepsilon$. Di qui si ricava, in particolare, che

$$\forall x \in [q-\delta, q+\delta] \qquad f(x) < f(q) + \varepsilon \tag{2.14}$$

[2] Lo studio di questa dimostrazione è facoltativo.

Ma poiché gli intervallini $[a_n, b_n]$ sono contenuti in $[q-\delta, q+\delta]$ per tutti gli n sufficientemente grandi e su ciascuno di essi l'estremo superiore di f vale L, dalla disuguaglianza 2.14 segue

$$L \leq f(q) + \varepsilon \tag{2.15}$$

Del resto ovviamente si ha

$$f(q) \leq L \tag{2.16}$$

(perché L è il sup di f) e quindi

$$f(q) \leq L \leq f(q) + \varepsilon \tag{2.17}$$

Poiché ε è arbitrario, si ricava $L = f(q)$, e con questo la dimostrazione è conclusa. ∎

Osservazione. Questa dimostrazione può sembrare molto simile a quella del teorema degli zeri di una funzione continua (metodo di bisezione). Ma c'è una sostanziale differenza. La dimostrazione con il metodo della bisezione del teorema di Weierstrass *non è costruttiva*, ma è *puramente esistenziale* cioè non fornisce un *algoritmo* per trovare un punto di massimo. Infatti non abbiamo un algoritmo per decidere (a ogni passaggio) quale dei due intervallini scegliere, cioè non sappiamo come decidere su quale dei due intervallini il sup di f coincide con il sup di f sull'intero $[a, b]$.

3 Esercizi

Esercizio 3.1. *Tracciare un grafico qualitativo della funzione*

$$\mathbb{R} \setminus \{1, 4\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}$$

.

Esercizio 3.2. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} 2x^3 & se \quad x \leq 1 \\ ax + b & se \quad x > 1 \end{cases}$

Quale relazione deve sussistere tra i parametri reali a *e* b *affinchè la funzione risulti continua in* $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 3.3. *Si consideri la funzione* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad g(t) = \begin{cases} e^t & se \quad t \geq 2 \\ \frac{1}{3}t + k & se \quad t < 2 \end{cases}$

Quale valore deve assumere il parametro reale k *affinché la funzione risulti continua in* $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 3.4. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} \cos x & se \quad x \geq 0 \\ ax - 3 & se \quad x < 0 \end{cases}$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* $\mathbb{R}$*.*

Esercizio 3.5. *Si consideri la funzione* $h : [-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a & se \quad x > 0 \\ \sqrt{x + 2} & se \quad -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* $[-2, +\infty)$*.*

Esercizio 3.6. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se \quad x \neq 0 \\ a & se \quad x = 0 \end{cases}$

Determinare per quali valori del parametro reale a *la funzione risulta continua in* 0*.*

Esercizio 3.7. *Tracciare un grafico qualitativo della funzione* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

per ogni x *in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

Esercizio 3.8. *Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di terzo grado* $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, *ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale* x_0 *per il quale* $P(x_0) = 0$*.*

Esercizio 3.9. *Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari* $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1x + a_0$, $a_{2m+1} \neq 0$, *ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale* x_0 *per il quale* $P(x_0) = 0$.

Esercizio 3.10. *Dimostrare che l'equazione* $x^3 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$ *ha un'unica soluzione reale, che appartiene all'intervallo* $(0, 1)$.

Esercizio 3.11. *Dimostrare che il polinomio* $p(x) = 4x^3 + x^2$ *ha un punto fisso nell'intervallo* $[-1, 1]$.

Esercizio 3.12. *Dimostrare che ogni applicazione continua* $[0, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$ *ha almeno un punto fisso.*

Esercizio 3.13. *Sia* $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, *una funzione crescente e suriettiva. Dimostrare che* f *è invertibile e* f^{-1} *è anch'essa crescente.*

Esercizio 3.14 (Vero o falso?)**.** *Sia* $A \xrightarrow{f} B$, *una funzione,* $A, B \subseteq \mathbb{R}$. *Se* f *è invertibile, allora* f *è monotona.*

Esercizio 3.15 (Vero o falso?)**.** *Sia* I *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione. Se* f *è continua, allora* $f(I)$ *è un intervallo.*

Esercizio 3.16 (Vero o falso?)**.** *Sia* I *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione. Se* $f(I)$ *è un intervallo, allora* f *è continua.*

Esercizio 3.17. (*) *Assumendo che la temperatura all'equatore sia funzione continua della longitudine, si dimostri che:*

a) esistono infinite coppie di punti all'equatore nei quali la temperatura è la stessa;

b) esiste almeno una coppia di punti antipodali all'equatore nei quali la temperatura è la stessa.

3.1 Suggerimenti e risposte.

Esercizio 3.1

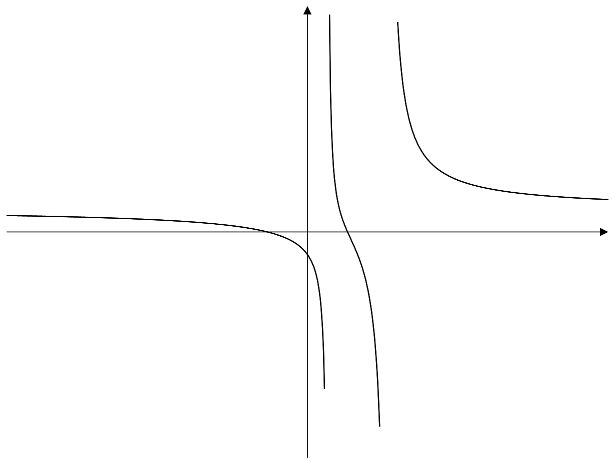

Figura 3: Grafico di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}$.

Esercizio 3.2 $a + b = 2$.

Esercizio 3.3 $k = e^2 - \frac{2}{3}$.

Esercizio 3.4 Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f è discontinua in $x = 0$.

Esercizio 3.5 $a = \sqrt{2}$.

Esercizio 3.6 $a = 0$.

Esercizio 3.7

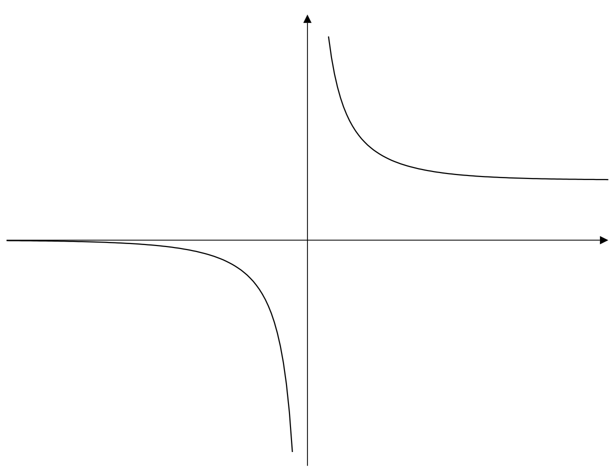

Figura 4: Grafico di $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

Esercizio 3.8 Se $a_3 > 0$, allora $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Ora si usi il teorema degli zeri.

Esercizio 3.9 Vedere l'esercizio precedente.

Esercizio 3.10 Posto $P(x) = x^3 + \frac{1}{3}x - 1$, si valuti $P(0)$ e $P(1)$, e si ricorra al teorema degli zeri. Per dimostrare che esiste al più una soluzione, si osservi che la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x - 1$ è crescente (in quanto somma di funzioni crescenti), e quindi iniettiva.

Esercizio 3.13 Se f è crescente, allora è iniettiva. (Infatti, siano $x, x' \in A$, $x \neq x'$, diciamo $x < x'$. Se f è crescente, si ha $f(x) < f(x')$, $f(x) \neq f(x')$ e quindi f è iniettiva). Siccome per ipotesi è anche suriettiva, f è invertibile (o bigettiva). Dimostriamo che f^{-1} è crescente. Siano $y, y' \in B$, $y < y'$ e poniamo $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. Si deve avere $x < x'$, perché se fosse $x' < x$, poiché f è crescente, si avrebbe $f(x') < f(x)$, ossia $y' < y$, contro l'ipotesi. (Non può essere $x = x'$, perché f^{-1} è iniettiva).

Esercizio 3.14 Falso. La funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è invertibile, ma non monotona.

Esercizio 3.15 Vero. Si è visto che è una formulazione equivalente al teorema degli zeri di una funzione continua su un intervallo.

Esercizio 3.16 Falso. Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.17 a) Sia $[0, 2\pi] \xrightarrow{T} \mathbb{R}$ la funzione che esprime la temperatura all'equatore. T ha per dominio un intervallo chiuso e limitato, è continua nel suo dominio (per ipotesi) e $T(0) = T(2\pi)$. T ha massimo e minimo (teorema di Weierstrass) e assume tutti i valori tra il valore massimo e quello minimo. Esistono pertanto infinite coppie di punti con la stessa temperatura (per convimcersene disegnare un possibile grafico di T).

b) Si consideri la funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{\overline{T}} \mathbb{R}$, $\overline{T}(x) = T(x) - T(x+\pi)$. Si ha $\overline{T}(0) = T(0) - T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = -\overline{T}(\pi)$. Pertanto, se $\overline{T}(0) = 0$ si ha $T(0) = T(\pi)$ e quindi $(0, \pi)$ costituisce una coppia di punti antipodali con la stessa temperatura. Se invece $\overline{T}(0) \neq 0$, per il teorema degli zeri esiste $\alpha \in (0, \pi)$ in cui $\overline{T}(\alpha) = 0$, cioè $T(\alpha) - T(\alpha + \pi) = 0$. ∎