DERIVATE E INTEGRALI SENZA LIMITI

Breve introduzione al calcolo infinitesimale

Mauro Saita

Versione provvisoria. Settembre 2025

Per non dimenticare.

Il 16 settembre 2025 Israele ha dato inizio all'invasione di terra della striscia di Gaza. Scopo dell'esercito israeliano è distruggere sistematicamente ogni residenza palestinese, comprese scuole, chiese, ospedali e uccidere il maggior numero dei suoi abitanti, compresi donne e bambini, la cui unica colpa è essere arabi. Tutto ciò è stato reso possibile grazie al sostegno indiscriminato degli USA e alla complicità di quasi tutta l'Europa. L'assordante silenzio con il quale il nostro governo ignora il genocidio in atto rende l'Italia corresponsabile di questo crimine e il peso di questa comportamento inaccettabile, piaccia o meno, grava sulle spalle di ognuno di noi.

Indice

[1]

---

[1]Nome file .tex: "Idee_fondamentali_del_calcolo_infinitesimale_2025.tex"

1 Derivate

1.1 Il simbolo d e differenti ordini di "piccolezza"

Il simbolo "d"significa una *piccola quantità di ...*

$$dx \; = \text{"piccola quantità di } x \text{ "}$$

Ovviamente, dy indica una piccola quantità di y, eccetera.

Ora, se stabiliamo cosa è da considerarsi piccolo per i nostri scopi è facile individuare quantità con un grado di piccolezza superiore. Ad esempio se, per i nostri scopi $\frac{1}{10^6}$ è una quantità piccola allora la quantità $\left(\frac{1}{10^6}\right)^2$ è una quantità che possiamo pensare di trascurare nei nostri calcoli. Più in generale, se dx indica una quantità piccola allora $(dx)^2$, $(dx)^3$ e così via individuano gradi di piccolezza superiore che possono essere ignorati. In definitiva, il nostro modo di procedere sarà guidato da questo principio, solo apparentemente folle

"*dx è quantità piccola, diversa da zero, per la quale risulta* $(dx)^2 = 0$ "

1.2 Crescite (decrescite) relative

In tutto il calcolo infinitesimale abbiamo a che fare con quantità che crescono e con i relativi tassi di crescita.

La fisica, come è noto, si occupa di grandezze misurabili; quando due di queste dipendono una dall'altra i fisici ricercano qual è la natura del loro legame. Per esempio, una molla che viene spostata dalla sua posizione di equilibrio genera una forza: la relazione tra lo spostamento x e la forza da esso generata è espressa dall'uguaglianza $F = kx$. Oppure, un corpo che cade nel vuoto, partendo da fermo, percorre in un tempo t, una distanza y secondo la legge $y = \frac{1}{2}at^2$ e così via.

Pensiamo in termini generali, supponiamo di avere due variabili x e y dipendenti l'una dall'altra, il cui legame è espresso mediante la funzione

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad y = f(x)$$

Una modifica in una provocherà una modifica nell'altra, a causa di questa dipendenza. Immaginiamo di variare x, cioè di modificarla o di immaginarla modificata, aggiungendole una piccola quantità che chiamiamo dx. Stiamo quindi facendo sì che x diventi $x + dx$. Quindi, poiché x è stato modificato, anche y sarà modificato e sarà diventato

$y + dy$. Qui la piccola quantità dy può essere in alcuni casi positiva, in altri negativa; e non avrà (tranne molto raramente) le stesse dimensioni di dx.

Ora, il calcolo infinitesimale (differenziale), si preoccupa di determinare il rapporto $\dfrac{dy}{dx}$. In altri termini ci si chiede: se si fa variare la variabile indipendente, in modo tale che il suo valore passi da x a $x + dx$, il corrispondente valore della funzione si modificherà da y a $y + dy$; quanto vale il rapporto $\dfrac{dy}{dx}$?

Il rapporto $\dfrac{dy}{dx}$ si chiama *derivata di y rispetto a x*. Obiettivo dei prossimi paragrafi sarà determinare questo rapporto.

1.3 Derivate di alcune funzioni elementari

1. Trovare la derivata in x della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = x^2$.

   Soluzione.

   Quando la variabile indipendente passa da x a $x + dx$ la funzione aumenta (diminuisce) di dy:

   $$\begin{aligned} y + dy &= (x + dx)^2 \\ &= x^2 + 2x\,dx + \underbrace{(dx)^2}_{=0} \end{aligned}$$

   Essendo $y = x^2$ l'ultima uguaglianza diventa $dy = 2x\,dx$ e dividendo per dx (che è una quantità diversa da zero) si ottiene il risultato richiesto, ossia

   $$\frac{dy}{dx} = 2x$$

2. **Derivata delle potenze x^n con $n \in \mathbb{N}$.**

   Trovare la derivata in x delle funzioni riportate in tabella (suggerimento: quando è necessario utilizzare il teorema del binomio di Newton).

Funzione $y = y(x)$	Derivata $\dfrac{dy}{dx}$
x^3	
x^4	
x^n	

3. **Derivata della funzione costante.**

   Trovare la derivata in x della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = k$, dove k è un numero reale costante.

4. Se una potenza di x è moltiplicata per una costante reale a, qual è la sua derivata? In altre parole, trovare la derivata $\dfrac{dy}{dx}$ di $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = a\,x^n$. Più in generale, dimostrare il seguente

   Teorema 1.1. *La derivata di $y = a\,f(x)$, con a costante reale, è $a\frac{df}{dx}$*

$$\frac{d}{dx}[a\,f(x)] = a\,\frac{df}{dx}$$

1.4 Applicazioni della derivata in fisica

Alcuni dei problemi più importanti del calcolo infinitesimale sono quelli in cui il tempo è la variabile indipendente. Quando una grandezza y varia in funzione del tempo si preferisce indicare la variabile indipendente con la lettera t (al posto di x).

In fisica è molto frequente imbattersi in derivate rispetto al tempo; vediamo alcuni esempi: se

$$[a, b] \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(t)$$

è la funzione che indica la posizione di un oggetto in funzione del tempo, allora

Velocità	$v = \frac{dy}{dt}$
Accelerazione	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
Forza	$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$
Lavoro	$L = m\frac{d^2y}{dt^2} \cdot y$

Altri esempi fin qui incontrati nel corso di fisica sono:

1. La potenza di una forza.
2. L'intensità di corrente $i = \frac{dQ}{dt}$.
3. ...

1.5 Derivata della somma, del prodotto e del quoziente

1. **Derivata della somma**

   Se $y = f + g$. allora $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{dg}{dx}$

   Dimostrazione.

   Da $y + dy = (f + df) + (g + dg)$ si ottiene: $dy = df + dg$. Dividendo entrambi i termini dell'uguaglianza per dx si ricava che la derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivate

   $$\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

2. **Derivata del prodotto**

   Se $y = f\,g$, allora $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}g + f\dfrac{dg}{dx}$ Q.E.D

   Dimostrazione.

   $$\begin{aligned} y + dy &= (f + df)\cdot(g + dg) \\ &= f g + df\, g + f\, dg + \underbrace{df\, dg}_{=0} \end{aligned}$$

   Poichè $y = f\,g$ si ottiene

$$dy = df\,g + f\,dg$$

e dividendo per dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}\,g + f\,\frac{dg}{dx}$$

Q.E.D.

3. **Derivata del quoziente**

   Se $y = \dfrac{f}{g}$, allora $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

   Dimostrazione.

$$y + dy = \frac{f + df}{g + dg}$$

$$(y + dy)(g + dg) = f + df$$

$$yg + y\,dg + g\,dy + \underbrace{dy\,dg}_{=0} = f + df$$

$$y\,dg + g\,dy = df$$

$$g\,dy = df - y\,dg$$

$$dy = \frac{df - y\,dg}{g}$$

   Infine, ricordando che $y = \dfrac{f}{g}$:

$$dy = \frac{df - \frac{f}{g}\,dg}{g} = \frac{df\,g - f\,dg}{g^2}$$

   e dividendo entrambi i termini dell'uguaglianza per dx otteniamo la tesi. Q.E.D.

1.6 Regola della catena

Teorema 1.2 (Chain rule)**.** *Se* $y = g \circ f$*, allora*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} \tag{1.1}$$

dove $u = f(x)$*.*

1.7 Derivata di seno e coseno

Teorema 1.3 (Derivata del seno)**.**

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

dove x *è un numero reale corrispondente alla misura in radianti di un angolo.*

La dimostrazione consiste nel trovare la relazione tra l'incremento dy della funzione seno e l'incremento x dell'angolo, quando entrambi gli incrementi sono indefinitamente piccoli. Infine, sarà semplice calcolarne il rapporto $\frac{dy}{dx}$.

Se l'angolo x viene incrementato di dx, la funzione y aumenterà di una piccola quantità dy

$$y + dy = \sin(x + dx)$$

e isolando dy otteniamo:

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x \tag{1.2}$$

Il termine di destra dell'ultima uguaglianza è la differenza di due seni, che può essere riscritta utilizzando la seguente formula (di prostaferesi)

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Posto $A = x + dx$ e $B = x$ l'uguaglianza 1.2 diventa

$$\begin{aligned} dy &= 2\cos\tfrac{2x+dx}{2} \cdot \sin\tfrac{dx}{2} \\ &= 2\cos\left(x + \tfrac{dx}{2}\right) \cdot \sin\tfrac{dx}{2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Per angoli piccoli $\sin\vartheta \sim \vartheta$, allora nel nostro caso possiamo scrivere $\frac{dx}{2}$ al posto di $\sin\frac{dx}{2}$.

$$dy = 2\,\frac{dx}{2}\cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \tag{1.5}$$

Infine, trascurando la quantità piccola $\frac{dx}{2}$ si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \tag{1.6}$$

Q.E.D.

Teorema 1.4 (Derivata del coseno)**.**

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

Basta utilizzare l'uguaglianza $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e poi utilizzare la regola della catena.

1.8 Derivata di e^x

Qui ci limitiamo a riportare un risultato che sarà dimostrato in seguito, ossia *la derivata di e^x è e^x.* In altre parole, se

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}_{>0}, \quad y = e^x$$

allora

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

1.9 Derivata del logaritmo

Trovare la derivata in x della funzione $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, $y = \ln x$.

Soluzione.

Da $y = \ln x$ si ottiene $x = e^y$. Abbiamo visto, nel paragrafo precedente, che la derivata dell'esponenziale (di base e) è la medesima funzione; quindi,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}e^y = e^y$$

Fatta questa osservazione, è facile calcolare la derivata del logaritmo (in base e), infatti

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

1.10 Derivata di $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$

La funzione x^α, con α numero reale arbitrario, è definita per $x > 0$. La sua derivata è $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Teorema 1.5. *La derivata di* $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ *è*

$$\frac{d}{dx}[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha-1} \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Basta scrivere x^α come $e^{\ln(x^\alpha)}$ e usare le regole di derivazione dell'esponenziale e poi la regola della catena:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^\alpha] &= \frac{d}{dx}[e^{\ln(x^\alpha)}] \\
&= \frac{d}{dx}e^{\alpha\ln(x)} \\
&= e^{\alpha\ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

1.11 La regola della catena all'opera

Nella seguente tabella sono riportate le applicazioni più frequenti della regola di derivazione della funzione composta, ovvero della regola della catena.

Funzioni	Derivate
$y = [f(x)]^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{dy}{dx} = \alpha\,[f(x)]^{\alpha-1}\,\dfrac{df}{dx}$
$y = \log_a \lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{dy}{dx} = (\log_a e)\,\dfrac{\frac{df}{dx}}{f(x)}$
$y = \ln \lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{df}{dx}}{f(x)}$
$y = a^{f(x)}$	$\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1}{\log_a e}\right)\dfrac{df}{dx}\,a^{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}\,\left[e^{f(x)}\right]$
$y = \sin f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}\,[\cos f(x)]$
$y = \cos f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{df}{dx}\,[\sin f(x)]$

2 Integrale

2.1 Il simbolo $\int$

Il simbolo "$\int$"consiste in una S lunga, stilizzata, che denota una sommatoria. Il suo significato è questo

$$\int \;=\; \text{“la somma di”}$$

$\int dy$ (si legge: integrale di di-ipsilon) significa "la somma di un grandissimo numero di quantità dy molto piccole.

2.2 Ogni quantità va pensata come somma di sue parti

Una delle idee chiave del calcolo infinitesimale consiste nell'immaginare una qualsiasi quantità, diciamo y, come composta da tantissime piccole sue parti che denotiamo con dy

$$y = \int dy$$

più piccole sono le parti, maggiore sarà il loro numero. Per esempio, una riga lunga un metro la si può pensare formata da 10 parti ognuna delle quali di lunghezza un decimetro o formata da 100 parti, tutte di lunghezza un centimetro, oppure ancora, formata da 1000 parti ognuno di lunghezza un millimetro e così via. Iterando questo modo di pensare si può arrivare a *concepire la riga composta da un numero infinito di elementi dy, ognuno dei quali è infinitamente piccolo.*

Questo modo di pensare risulta molto utile perché in moltissimi casi permette di ottenere il risultato esatto che, diversamente, richiederebbe per la sua determinazione un'enorme quantità di calcoli.

2.3 Integrale

Spesso ci si imbatte in integrali del tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dove $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, y = f(x)$ è la funzione che esprime il legame esistente tra la variabile indipendente x e quella dipendente y.

Capita anche di imbattersi frequentemente in integrali della forma

$$\int_\gamma f(x)\,dx, \quad \text{oppure} \quad \oint f(x)\,dx$$

Per capirne il significato vediamo alcuni esempi significativi.

(a) *Lavoro compiuto dalla forza* $\mathbf{F}$ *per spostare un punto materiale da un punto* A *a un punto* B.

L'elemento infinitesimo di lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ per spostare il punto di un trattino $d\mathbf{l}$ è espresso dalla relazione differenziale $dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$. Il lavoro lungo il cammino γ che connette A e B è dato dalla somma di tutti i lavori elementari

$$L = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

Circuitazione del campo magnetico e del campo elettrico

Sia γ una curva chiusa orientata . Con il termine *circuitazione di* $\mathbf{B}$ *lungo* γ si intende il "lavoro" compiuto da $\mathbf{B}$ lungo la curva orientata γ[2].

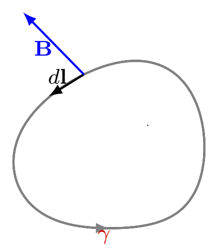


Figura 1: Circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo la linea chiusa γ

Per calcolare la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo γ bisogna prima calcolare il "lavoro" elementare $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ compiuto dal campo magnetico lungo un tratto infinitesimo di curva $d\mathbf{l}$ e poi fare la somma dei lavori elementari relativi a tutti i trattini $d\mathbf{l}$ che costituiscono la curva. Si ottiene

$$\texttt{Circuitazione di } \mathbf{B} \texttt{ lungo } \gamma \quad = \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$$

Considerazioni analoghe permettono di definire la circuitazione del campo elettrico.

(b) *Flusso del campo magnetico attraverso una superficie.*

Se $\mathbf{B}$ indica un campo vettoriale qualsiasi; si chiama *flusso di* $\mathbf{B}$ *attraverso una superficie (orientata)* S (si scrive $\Phi_S(\mathbf{F})$) l'integrale

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

[2] Il termine lavoro è improprio perchè $\mathbf{B}$ non è una forza.

(c) ...

2.4 Note le pendenze di una curva si può costruire la curva stessa?

Facciamo una piccola digressione sulle pendenze di una curva. Abbiamo visto che derivare una curva significa trovare un'espressione per la sua pendenza (o per le sue pendenze in punti diversi). Ora ci si chiede: è possibile ricostruire l'intera curva se è nota la sua pendenza in ogni suo punto?

La più semplice delle "curve" è la retta di equazione $y = ax + b$ Sappiamo che qui b rappresenta il valore di y quando $x = 0$, e che $a = \frac{dy}{dx}$ indica la "pendenza" della retta. La retta ha una pendenza costante. Lungo tutta la retta i triangoli elementari , hanno la stessa proporzione tra altezza e base[3].

Supponiamo di dividere il segmento AB in dieci parti uguali, diciamo che ciascun dx misuri un centimetro, e di costruire i dieci triangoli indicati nella figura qui sotto.

Ci chiediamo: a partire da questi triangolini, ossia conoscendo la pendenza della curva ($\frac{dy}{dx} = a$), è possibile ricostruire la curva?

Quello che potremmo fare è prendere i dieci triangolini, disporli uno accanto all'altro in modo da ottenere la linea retta con la pendenza corretta. Quello che non ci è riuscito di determinare è la quota in cui la nostra linea deve intersecare l'asse delle ordinate.

[3] Più precisamente, se i dx sono tutti uguali, lo sono anche i triangolini

3 Legame tra derivazione e integrazione: il teorema fondamentale del calcolo

Ricapitoliamo quanto si è già detto nei paragrafi precedenti. Supponiamo che x e y siano due quantità fisiche (spazio e tempo, oppure volume e densità , etc.) dipendenti l'una dall'altra: a una variazione di x corrisponde una ben determinata variazione di y e viceversa. La relazione tra le due quantità è espressa dalla funzione

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad y = f(x)$$

Suddividiamo $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza dx. Tutte le volte che la quantità x cresce di dx (segmentini orizzontali rossi) la funzione cresce di un trattino dy (segmentini verticali di colore blue).

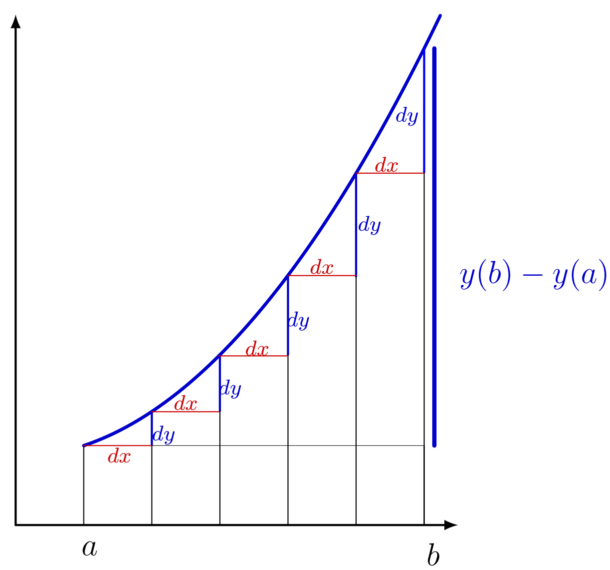


Figura 2: La variazione $y(b) - y(a)$ è la somma di tutti i dy.

Osservando attentamente la figura si vede che la variazione di y, da $x = a$ a $x = b$, è data dalla somma di tutti gli incrementi dy

$$y(b) - y(a) = \int_a^b dy$$

Moltiplicando e dividendo per dx si ottiene l'uguaglianza

$$y(b) - y(a) = \int_a^b \frac{dy}{dx}\, dx$$

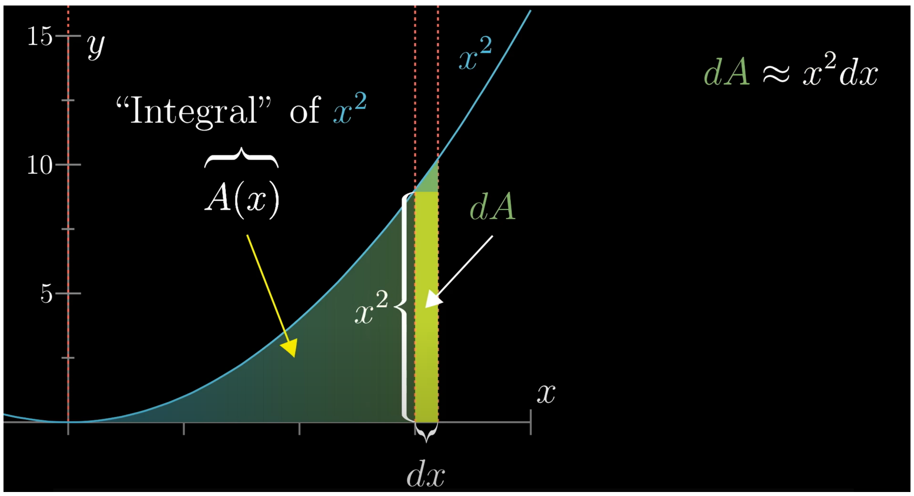
la quale ci dice molte cose: la prima è che la derivata di y rispetto a x è esattamente la funzione integranda. Questo fatto precisa in che senso l'integrazione inverte l'operazione di derivazione.

Ora, analizziamo l'uguaglianza leggendola da destra a sinistra: tutte le volte che si deve calcolare un integrale $\int_a^b \frac{dy}{dx}\, dx$ bisogna trovare una funzione $y = y(x)$ la cui derivata rispetto a x sia esattamente l'integranda; si dice che bisogna trovare una antiderivata (primitiva) $y = y(x)$ della funzione integranda. Poi si valuta la funzione in $x = b$ e in $x = a$; infine si calcola la differenza dei valori trovati. $y(b)-y(a)$ è il valore dell'integrale che si doveva calcolare!

3.1 Come utilizzare l'integrale per il calcolo di un'area.

• **Trovare l'area che sta sotto al grafico di una funzione.**

Trovare l'area $A(x)$ della figura compresa tra il grafico della parabola $f(x) = x^2$ e l'asse delle x, quando x varia nell'intervallo $[0, 4]$.



L'elemento dA di area (in figura, indicata in giallo) relativo alla piccola quantità dx è

$$dA = x^2\, dx$$

mentre tutta l'area delimitata dalla parabola e dall'asse x ($0 \leq x \leq 4$) è data dall'integrale

$$\int_0^4 x^2\, dx$$

Come abbiamo visto nella sezione precedente, per calcolare questo integrale bisogna:

(a) Trovare una funzione la cui derivata rispetto a x sia x^2, in altri termini occorre trovare un'antiderivata (primitiva) $F(x)$ di $f(x) = x^2$.

Per indicare un'antiderivata si usa il simbolo di integrale *senza* apici né pedici: $F(x) = \int f(x)\, dx$.

(b) Si valuta l'antiderivata agli estremi dell'intervallo, cioè si calcola $F(4)$ e $F(0)$.

(c) Si fa la differenza dei valori trovati.

Ovviamente la difficoltà computazionale del calcolo dell'integrale risiede nella determinazione dell'antiderivata, ma in questo caso le cose sono molto semplici: le funzioni aventi per derivata x^2 sono $\frac{1}{3}x^3 + c$ (con c costante reale arbitraria) cioè

$$F(x) = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

In definitiva l'area cercata è

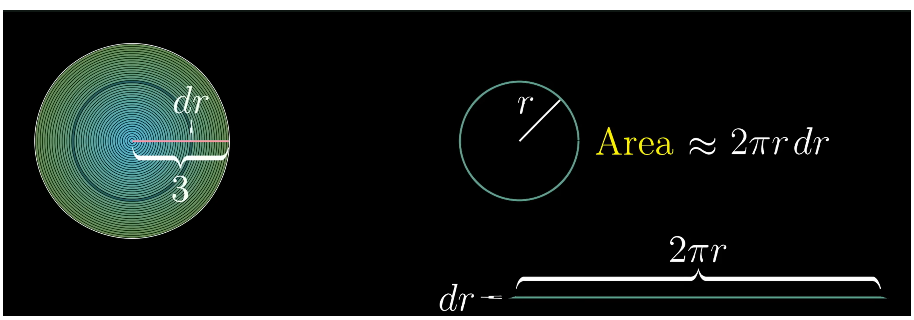
$$\int_0^4 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{1}{3}4^3 - 0$$

Da questo esempio capiamo quanto sia utile saper calcolare primitive del maggior numero possibile di funzioni.

Area del cerchio.

Un esercizio interessante, oltre che istruttivo, consiste nel ricavare l'area del cerchio di raggio R, utilizzando il calcolo integrale,.

Qui determiniamo, per mezzo degli integrali, l'area del cerchio di raggio 3.



Suddividiamo il cerchio in tanti anelli concentrici di spessore dr (si veda la figura riportata qui sopra); l'elemento di area dA dell'anello che si trova a distanza r dal centro del cerchio è

$$dA = 2\pi r\, dr$$

e l'area totale è data dalla somma delle aree di tutti gli anelli concentrici

$$A_{cerchio} = \int_0^3 dA = \int_0^3 2\pi r\, dr$$

Ora dobbiamo utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale: è facile rendersi conto che una antiderivata di $f(r) = 2\pi r$ è $F(r) = \pi r^2$ e, di conseguenza

$$A_{cerchio} = \int_0^3 2\pi r\, dr = \pi\, 3^2 - \pi\, 0^2 = 9\pi$$

Con un ragionamento del tutto analogo si ottiene che l'area del cerchio di raggio R è $\pi\, R^2$.

3.2 Ricerca di primitive

Come abbiamo più volte ribadito, il teorema fondamentale del calcolo integrale riconduce il calcolo dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ alla determinazione di una primitiva di f, problema in molti casi difficile. La tabella riportata qui sotto è stata ottenuta dalla conoscenza delle derivate di alcune funzioni elementari. La lettera c indica una qualsiasi costante reale.

Funzioni	Antiderivate
$x^\alpha \;\; (\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x \;\; (a > 0 \, \wedge \, a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\, a^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$

Altre primitive si ottengono leggendo da destra a sinistra la tabella proposta nel paragrafo 1.11 riguardante la regola di derivazione della funzione composta. Infatti da $\frac{d}{dx}[g(f(x))] = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}$ ricavaviamo $\int \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}\,dx = g(f(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Funzioni	Primitive
$[f(x)]^\alpha \dfrac{df}{dx}$, $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\,[f(x)]^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{\frac{df}{dx}}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\dfrac{df}{dx}\,e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$\dfrac{df}{dx}\,a^{f(x)} \quad (a > 0 \,\wedge\, a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\,a^{f(x)} + c$
$\dfrac{df}{dx}\cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$\dfrac{df}{dx}\sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$\dfrac{\frac{df}{dx}}{[\cos f(x)]^2}$	$\tan f(x) + c$
$\dfrac{\frac{df}{dx}}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan f(x) + c$

4 L'integrale della somma di due funzioni è la somma degli integrali delle due funzioni

Quando abbiamo derivato la somma di due funzioni, la derivata era semplicemente la somma delle due derivate separate. Quindi, quando lavoriamo a ritroso, integrando, l'integrazione sarà semplicemente la somma delle due integrazioni separate. Quindi otteniamo

4.1 Prime proprietà dell'integrale

L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ può esistere oppure no, ciò (ovviamente) dipende dalla scelta della funzione integranda; nel caso esista[4], si dice che f *è (Riemann) integrabile in* $[a,b]$.

Teorema 4.1. *Per l'integrale di Riemann valgono le proprietà seguenti:*

1. (**Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda.**) *Per ogni f, g integrabili in $[a,b]$*
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{4.1}$$

2. (**Omogeneità dell'integrale.**) *Per ogni f integrabile in $[a,b]$ e per ogni numero reale k*
$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.2}$$

3. (**Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.**) *Per ogni f integrabile in $[a,b]$ e per ogni $c \in (a,b)$, le restrizioni di f agli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ sono integrabili e*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.3}$$

4. (**Monotonia dell'integrale.**) *Se f, g sono integrabili in $[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora*
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{4.4}$$

5. *Se f, g sono integrabili in $[a,b]$, allora anche il loro prodotto fg è integrabile in $[a,b]$.*

Definizione 4.2 (Integrale orientato). *Se $a > b$, si pone, per definizione,*
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{4.5}$$
Con questa definizione, l'uguaglianza
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.6}$$
vale per ogni scelta di a, b, c (anche se c non è compreso tra a e b), a patto che gli integrali considerati esistano.

[4] In seguito si mostrerà che la classe delle funzioni integrabili in $[a,b]$ è molto ampia.