

ESAME DI STATO. SECONDA PROVA SCRITTA.
Sessione ordinaria 2015. Matematica
Soluzione dei due problemi.

1

Testo e soluzioni sono reperibili in molti siti, tra i quali

- <http://www.matematica.it/tomasi/matls/2015/M557.pdf>
- http://www.matefilia.it/maturita/index_esame_di_stato.shtm
- <http://matematica.unibocconi.it/articoli/esame-di-stato-2015-la-prova-di-matematica>

Le soluzioni proposte da ‘matefilia’ mi sono parse le più accurate. Ovviamente è un parere sindacabile; tutte e tre le versioni consultate sono sufficientemente dettagliate e ugualmente utili per prepararsi alla seconda prova dell’esame di stato. Le note di queste pagine sulle soluzioni dei due problemi hanno avuto lo scopo di guidare trenta studenti nella ricerca della ‘loro’ soluzione. Non saprei dire con quali risultati.

¹Nome file .tex: “Seconda_prova_2015_Soluzione.tex”

1 Problema 1

1. Sia x il numero di minuti di conversazione in un mese. Ovviamente x può assumere un valore compreso tra 0 (nessuna telefonata) e 43200 che corrisponde al numero totale di minuti in un mese ($x = 43200$ corrisponde a una telefonata continua della durata di un mese!). La spesa totale $f(x)$ nel mese è

$$[0, 43200] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 10 + \frac{1}{10}x \quad (1.1)$$

mentre il costo medio $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ al minuto è

$$(0, 43200] \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{10}{x} + \frac{1}{10} \quad (1.2)$$

Il grafico di f è il segmento della retta di coefficiente angolare $\frac{1}{10}$ mentre la quota di intersezione con l'asse y è 10. Il punto $(0, 10)$ si interpreta così: se non si fanno telefonate la spesa mensile è pari al canone fisso.

Il grafico di g è un ramo di iperbole equilatera; la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale di g mentre la retta di equazione $y = \frac{1}{10}$ è asintoto orizzontale. La funzione g è (strettamente) decrescente e non ha né massimi né minimi. Aumentando il numero x di minuti di telefonate, il costo medio di una singola telefonata diminuisce; per x che tende a $+\infty$, $g(x)$ tende a $\frac{1}{10}$ (l'incidenza del canone mensile per telefonata diventa molto basso, infatti tende a $\frac{1}{10}$).

2. Si tratta di trovare x_1 per il quale risulta $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$, ossia

$$\frac{10}{x_1} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \left[\frac{10}{x_0} + \frac{1}{10} \right] \quad (1.3)$$

Con qualche conto si ottiene:

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0} \quad (1.4)$$

Se si pone, per facilitare la lettura $x_1 = y$ e $x_0 = x$, la (1.4) assume la forma:

$$y = \frac{200x}{100 - x} \quad (1.5)$$

È una funzione omografica (iperbole equilatera con asintoti di equazione $x = 100$ e $y = -200$)

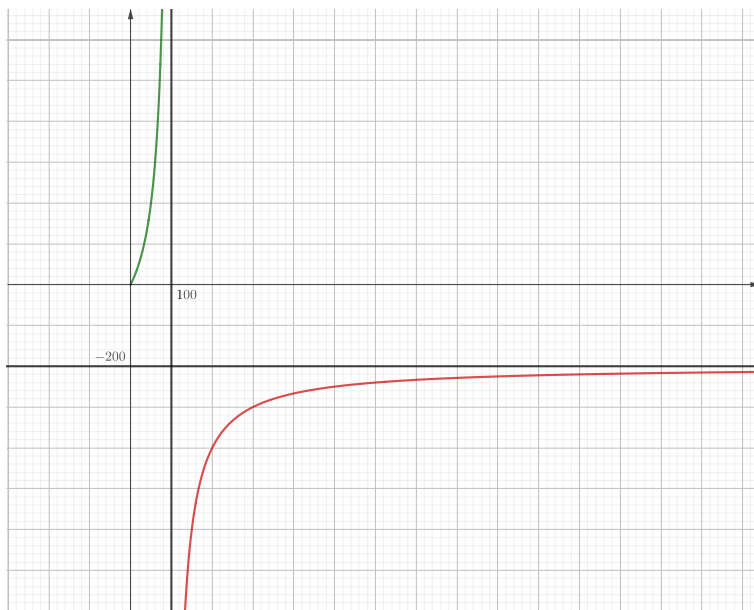


Figura 1

Dal grafico si osserva quanto segue: il costo medio y può essere dimezzato solo se il numero x di telefonate effettuate è minore di 100 (minuti); viceversa, se x è maggiore di 100, il costo medio è negativo (e pertanto non dimezzabile).

3. La funzione polinomiale richiesta è

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2, \quad 0 \leq x \leq 6 \tag{1.6}$$

L'area corrispondente a tutta la zona è

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \right) dx = 21 \text{Km}^2 \tag{1.7}$$

L'area della zona Z è $\frac{1}{2} = 0,50 \text{Km}^2$

L'area coperta dal segnale è in percentuale

$$\frac{21 - 0,50}{21} \sim 98\% \tag{1.8}$$

4. Le nuove funzioni f e g che tengono conto della modifica introdotta dall'operatore (peggiorativa, ovviamente!) sono le seguenti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + 10 & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ \frac{2}{10}x - 40 & \text{se } x > 500 \end{cases} \tag{1.9}$$

2 Problema 2

1. La funzione

$$[-3, 3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

di cui viene fornito il grafico ha quattro *zeri*:

$x = -2$ con molteplicità 1;

$x = 0$ con molteplicità 1;

$x = +2$ con molteplicità 2 (perchè il grafico di f è tangente in $+2$ all'asse x).

Segue che, nell'ipotesi che $f(x)$ sia un polinomio, il grado di f deve essere almeno 4.

2. Per ipotesi g è una primitiva di f , quindi

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in [-3, 3]$$

Il segno di g' è riportato nello schema qui sotto

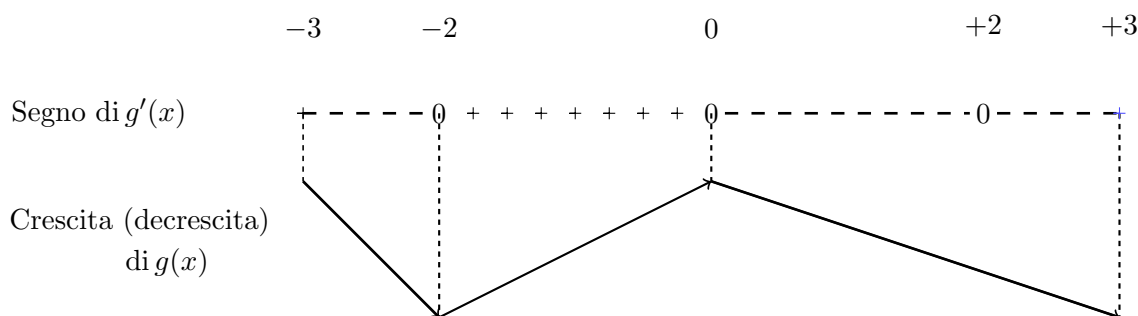


Figura 2: Segno di g' , crescita (decrescenza) di g .

Segue che il punto di frontiera $x = -3$ e il punto (interno) $x = 0$ sono minimi locali di g .

Per quanto riguarda l'ultima domanda di questo punto: per ogni x in $[-3, +3]$, da $g'(x) = f(x)$ segue $g''(x) = f'(x)$. Quindi g è convessa quando f' è positiva, ossia quando f è crescente. In conclusione, la funzione g è convessa in $[-3, -1] \cup [1, 2]$

3. Ricordando che g è una primitiva di f , dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\begin{cases} g(-2) - g(-3) = -2 \\ g(0) - g(-2) = 3 \\ g(2) - g(0) = -3 \\ g(3) - g(2) = -1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Infine essendo $g(3) = -5$, da (2.1) si ricava: $g(2) = -4$ e $g(0) = -1$ (anche se non richiesti: $g(-2) = -4$ e $g(-3) = -2$).

4. La funzione g , derivabile in $[-3, +3]$, è continua nel medesimo intervallo (la derivabilità implica la continuità). Il limite richiesto presenta una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \frac{1 + g(0)}{2 \cdot 0} = \frac{1 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \quad (2.2)$$

Utilizzando il teorema di de l'Hôpital (le cui ipotesi sono soddisfatte) si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} = 0 \quad (2.3)$$

5. Per calcolare l'integrale richiesto si pone $t = 2x + 1$ (da cui: $dt = 2 dx$).

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 h(x) dx &= \int_{-2}^1 3 \cdot f(2x + 1) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^3 f(t) dt \\ &= \frac{3}{2} \left[\int_{-3}^{-2} f(t) dt + \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\int_{-3}^{-2} f(t) dt + \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \right] \\ &= \frac{3}{2} [-2 + 3 - 3 - 1] \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$