LEZIONE 2

Composizione di funzioni. Funzioni invertibili

Definizione (Composizione di funzioni)

Siano f e g sono due funzioni per le quali il codominio di f coincide con il dominio di g, *ossia*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Si chiama funzione composta la funzione $g \circ f$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

così definita

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

per ogni x in A.

Funzione composta

Il seguente diagramma commutativo permette di visulizzare la situazione:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}
$$

Attenzione

La funzione composta $g \circ f$ è definita soltanto quando il codominio di f coincide con il dominio di g.

Esempi

1. La funzione composta $g \circ f$ di

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x - 1$$
$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{>0}, \quad g(x) = e^x$$

è la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}_{>0}, \quad (g \circ f)(x) = e^{2x-1}$$

per ogni x in $\mathbb{R}$

Esempi

2. La funzione composta $g \circ f$ di

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, \quad f(x) = x^2 + 1$$
$$\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \log x$$

è la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$$

per ogni x in $\mathbb{R}$

Esempi

3. La funzione composta $g \circ f$ di

$$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{f} [0, +\infty), \quad f(x) = 2x^4 + 3x^2$$

$$[0, +\infty) \xrightarrow{g} (-\infty, +\infty), \quad g(x) = \sqrt{x}$$

è la funzione

$$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{g \circ f} (-\infty, +\infty),$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^4 + 3x^2}$$

Proprietà della composizione di funzioni

Leggi di identità. Se $A \xrightarrow{f} B$, allora

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f$$

Legge associativa. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, allora

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Quindi è possibile tralasciare la parentesi e scrivere semplicemente

$$h \circ g \circ f$$

Attenzione!

Per la composizione di funzione non vale la legge commutativa.

Fare un esempio (esercizio).

Definizione

Funzione invertibile

Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ *si dice invertibile (o un isomorfismo dall'insieme* A *all'insieme* B*) se esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *per cui risulti:*

$$g \circ f = 1_A \quad e \quad f \circ g = 1_B$$

Una tale funzione g *(se esiste) si chiama funzione inversa di* f*.*

Teorema (Unicità dell'inversa)

Sia $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione invertibile. Se* $B \xrightarrow{g} A$, $B \xrightarrow{g'} A$ *sono* entrambe *inverse di* f *allora* $g = g'$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
g = \; & g \circ 1_B && \text{(definizione di funzione identità)} \\
= \; & g \circ (f \circ g') && \text{(g' è l'inversa di f)} \\
= \; & (g \circ f) \circ g' && \text{(associatività della composizione di funzioni)} \\
= \; & 1_A \circ g' && \text{(g è l'inversa di f)} \\
= \; & g' && \text{(definizione di funzione identità).} \qquad Q.E.D.
\end{aligned}$$

Se la funzione $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile, allora l'inversa (che è unica) si denota con il simbolo

$$f^{-1}$$

Teorema

Siano A, B insiemi. Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile se e solo se è biunivoca

Questo teorema stabilisce il legame esistente tra le funzioni invertibili e quelle iniettive e suriettive. Chi è interessato può trovare la dimostrazione nel mio sito (file "Funzioni ", home page).

Grafico della funzione inversa

Se la funzione $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile, allora il grafico della funzione inversa

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta, bisettrice del primo e terzo quadrante degli assi cartesiani.

Esempio

La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, \quad f(x) = e^x$$

è invertibile la sua inversa è la funzione logaritmo

$$\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \ln x$$

I grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = x$

Grafici di e^x e $\ln x$