LEZIONE 4

Alcuni teoremi sui limiti

Indice degli argomenti

Punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$

Teorema (Permanenza del segno)

Sia x_0 punto di accumulazione di $D \subset \mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$$

allora esiste un intorno $I = I(x_0; \delta)$ tale che per ogni $x \in I$ (con $x \neq x_0$ e $x \in D$), $f(x)$ ha lo stesso segno del limite L.

Teorema della somma, prodotto e quoziente di limiti

Teorema (Somma, prodotto e quoziente di limiti)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$
3. *Se* $L_2 \neq 0$*, allora* $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2$

Esercizio

Esercizio

Trovare, se esistono, i limiti seguenti

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1}{-3x^2 + x}$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 - 2x + 3}{5x^2 - x - 1}$$
3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 2x + 3}{3x^3 - x^2 + 2}$$

Le funzioni monotone hanno limite

Teorema

Se $(a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è una funzione crescente allora*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

- Gli estremi dell'intervallo (a, b) possono essere finiti o infiniti.
- Per funzioni decrescenti sull'intervallo (a, b) vale un teorema analogo: se $(a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione decrescente allora $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$.

Asintoti verticali

Definizione (Asintoto verticale)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per il dominio* D *della funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
La retta $x = x_0$ *si chiama asintoto verticale del grafico della funzione* f, *se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= +\infty \ (oppure \ -\infty) \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= +\infty \ (oppure \ -\infty) \end{aligned}$$

Asintoti orizzontali

Definizione (Asintoto orizzontale)

- *Sia* $(a, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
  La retta di equazione $y = L$ *si dice* *asintoto orizzontale di* f, *per* $x \to +\infty$, *se è soddisfatta la condizione:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

- *Sia* $(-\infty, a) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
  La retta di equazione $y = K$ *si dice* *asintoto orizzontale di* f, *per* $x \to -\infty$, *se è soddisfatta la condizione:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$$

Asintoti obliqui

Definizione (Asintoto obliquo)

Sia $(a, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
La retta di equazione $y = mx + q \ \ (m \neq 0)$ *si dice* *asintoto obliquo* *del grafico di* f, *per* $x \to +\infty$, *se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0, \tag{1}$$

ossia, in modo equivalente, se

$$f(x) = mx + q + \varepsilon(x), \qquad \textit{per } x \to +\infty \tag{2}$$

dove $\varepsilon(x)$ *designa una funzione infinitesima per* $x \to +\infty$.

In modo analogo si definisce un asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$.

Asintoti obliqui

La condizione

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

e la condizione equivalente

$$f(x) = mx + q + \varepsilon(x), \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dicono che

la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto $(x, mx + q)$ (con la stessa ascissa) sulla retta $y = mx + q$, tende a zero, per $x \to +\infty$.

Regola per trovare l'asintoto obliquo

La retta di equazione
$$y = mx + q$$
è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} & = & m, & (m \neq 0) \\
(b) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx & = & q, & (q \in \mathbb{R}).
\end{array}
$$

Dimostrazione della Regola per trovare l'asintoto obliquo

Dimostrazione

$\Downarrow$

Per ipotesi, $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.
Allora, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = mx + q + \varepsilon(x) \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

Ora, $\dfrac{q}{x} \to 0$ e anche $\dfrac{\varepsilon(x)}{x} \to 0$, perché il numeratore tende a 0 e il denominatore a $+\infty$. Quindi, $f(x)/x$ tende a m, per $x \to +\infty$).

Inoltre, sempre da: $f(x) = mx + q + \varepsilon(x)$, si ottiene:
$f(x) - mx = q + \varepsilon(x)$. Ossia $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$. $\square$

Dimostrazione della Regola per trovare l'asintoto obliquo

Dimostrazione

$(\Uparrow)$ Per ipotesi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad (m \neq 0)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q, \quad (q \in \mathbb{R})$.

Se (per $x \to +\infty$) esiste l'asintoto obliquo $y = m'x + q'$ di f, si ha: $f(x) = m'x + q' + \varepsilon(x), \quad \frac{f(x)}{x} = m' + \frac{q'}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m'$. Quindi, deve essere $m = m'$.

Ora, dalla seconda ipotesi ($\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q$) si ricava:

$$f(x) - mx = q + \varepsilon(x)$$

Segue la tesi ($y = mx + q$ è asintoto obliquo di f). $\square$

Asintoti obliqui

Esempio

Sia

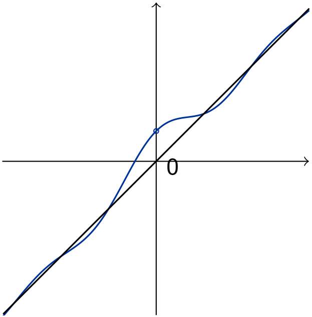
$$f(x) = x + 2\,\frac{\sin x}{x}$$

Per $x \to +\infty$, *la funzione* $\dfrac{\sin x}{x}$ *tende a zero (è infinitesima); quindi:*

$$f(x) = x + \varepsilon(x) \qquad\qquad (\textit{dove } \varepsilon(x) \textit{ è infinitesima})$$

La retta di equazione $y = x$ *è asintoto obliquo di* $f(x)$, *per* $x \to +\infty$.

Asintoti obliqui



Il grafico di $f(x)$ non si avvicina alla retta $y = x$ sempre da sopra, nè sempre da sotto, ma intersecando l'asintoto infinite volte.