LEZIONE 9

Funzioni reali continue su un intervallo

Indice degli argomenti

- Intervalli.
- Teorema degli zeri.
- Teorema dei valori intermedi.
- Teorema dell'inversa continua.
- Teorema di Weierstrass.

Intervalli di $\mathbb{R}$.

Definizione

Gli intervalli di $\mathbb{R}$ *sono:* $\quad (a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b)$

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
6. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
7. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
8. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
9. *L'intera retta reale* $\mathbb{R}$.

Intervalli di $\mathbb{R}$

Osservazione importante

- L'insieme vuoto è un intervallo. Si ottiene da (a, b), con $a = b$.
- Un punto è un intervallo. Si ottiene da $[a, b]$, con $a = b$

Definizione (Segmento)

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, si chiama segmento compatto (chiuso e limitato) determinato da x e y, denotato $[x, y]$, è l'insieme:

$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \mid \ x \leq t \leq y\}$$

Proprietà di convessità degli intervalli di $\mathbb{R}$

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se vale la seguente proprietà (detta di convessità):

$$(\forall x, y \in I) \quad x \leq y \implies [x, y] \subseteq I$$

In altri termini, gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi I di $\mathbb{R}$ che soddisfano la seguente proprietà:

se I contiene due punti
allora
contiene tutti i punti del segmento che li unisce.

Il Teorema degli Zeri.

Teorema (degli Zeri)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione* $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$. *Se*

- $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è continua su* $[a, b]$;
- *i valori* $f(a)$ *e* $f(b)$ *hanno segni opposti (vale a dire,* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$*, o viceversa)*

allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ *in cui si ha*

$$f(c) = 0$$

Il Teorema degli Zeri.

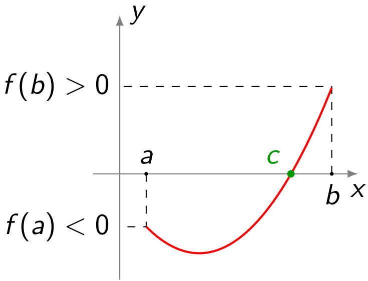
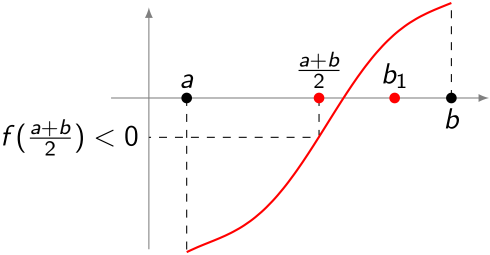


Figure: Teorema degli zeri. Il grafico di una qualsiasi funzione continua su $[a, b]$ che assume valori di segno opposto agli estremi deve necessariamente intersecare l'asse x almeno una volta.

Dimostrazione del teorema degli zeri. Parte 1.



Si ponga $I_0 = [i_0, j_0] = [a, b]$ e si consideri il punto medio $\dfrac{a+b}{2}$.
Se $f(\dfrac{a+b}{2}) = 0$, il teorema è dimostrato altrimenti si scelga l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] & se \quad f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0 \\ \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] & se \quad f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione del teorema degli zeri. Parte 1.

Iterando le bisezioni possono capitare due cose:
1) f si annulla in uno dei punti medi. Il procedimento finisce dopo un numero finito di passi e la tesi del teorema è dimostrata.
2) f non si annulla in alcun punto medio. In questo caso si ottiene una successione di infiniti intervalli inscatolati

$$[i_0, j_0] \supset [i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

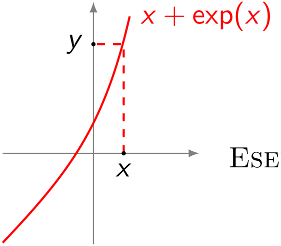
di ampiezza $j_n - i_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Per una conseguenza del teorema di completezza di $\mathbb{R}$ esiste un unico punto $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli.

Dimostrazione del teorema degli zeri.

Resta da dimostrare che $f(c) = 0$.

Poichè f preserva i limiti di successioni perchè è continua, per ipotesi. Quindi, da $i_n \to c$, $j_n \to c$ segue: $f(i_n) \to f(c)$, $f(j_n) \to f(c)$. Per il teorema di permanenza del segno, $f(i_n) < 0 \implies f(c) \leq 0$, e $f(j_n) > 0 \implies f(c) \geq 0$. Quindi $f(c) = 0$. Q.E.D.



ESEMPIO $f(x) = x + e^x$ si annulla tra -1 e 0.

Il Teorema dei Valori Intermedi)

Teorema (dei valori intermedi)

Ipotesi:

1. $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo;* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *funzione continua su* I*;*
2. $a, b \in I$*;* $\quad a < b$*;* $\quad f(a) < f(b)$*;*
3. $v \in \mathbb{R}$ *soddisfacente:* $\qquad f(a) < v < f(b)$.

Tesi:

$$\exists c \in (a, b) \qquad f(c) = v$$

Il Teorema dei Valori Intermedi)

In breve:

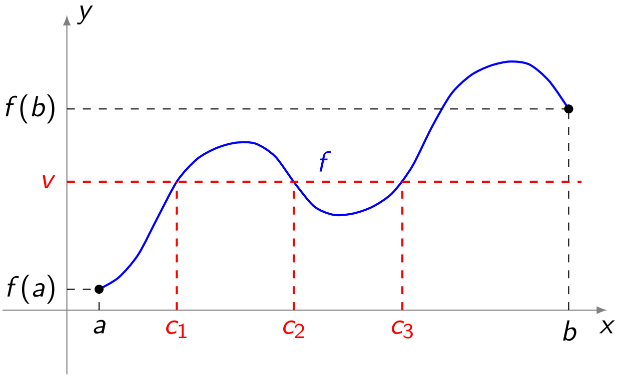
le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

trasformano intervalli in intervalli

Se $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è funzione continua su un intervallo I, la sua immagine $J = f(I)$ è un intervallo.

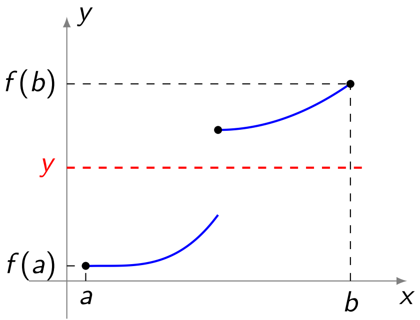
Dimostrazione (Teorema dei Valori Intermedi).

La funzione $g(x) = f(x) - v$ sull'intervallo $[a, b]$ soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri. Infatti, g è continua, $g(a) = f(a) - v < 0$ e $g(b) = f(b) - v > 0$. Quindi esiste (almeno) un $c \in (a, b)$ in cui $g(c) = f(c) - v = 0$. Quindi, $f(c) = v$. Q.E.D.



Osservazione (1)

Osservazione (1). Dalle ipotesi del teorema dei valori intermedi non si può eliminare che f sia continua. Controesempio:



Osservazione (2)

Osservazione (2). Dalle ipotesi del teorema dei valori intermedi non si può eliminare che il dominio di f sia un intervallo.
Controesempio:

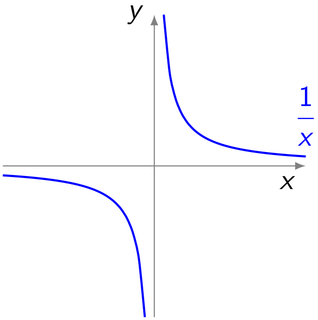


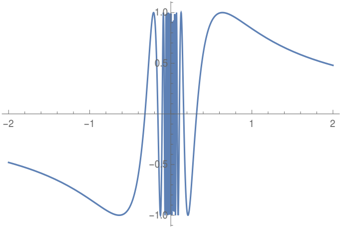
Figure: La funzione $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua, ma non assume il valore 0.

Proprietà dei Valori Intermedi $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Continuità

DOMANDA: $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Supponiamo che f soddisfi la Proprietà dei Valori Intermedi (di Darboux):

Per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$, f assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Possiamo concludere che f è continua? Risposta: No



La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ soddisfa la proprietà dei valori intermedi, assume tutti i valori tra -1 e 1, ma non è continua (in 0).

Problema

Se una funzione reale di variabile reale (cioè una funzione $A \xrightarrow{f} B$, con $A, B \subset \mathbb{R}$) è continua e invertibile, la sua funzione inversa è necessariamente continua?
Risposta: NO.

La risposta diventa affermativa se il dominio di f è un intervallo (oppure un *compatto*, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato). Vale infatti il seguente

Teorema (Continuità della funzione inversa)

Sia f una funzione continua definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$. Se la funzione $I \xrightarrow{f} f(I)$ è invertibile, allora la funzione inversa $f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$ è continua.

Esempio di funzioni inverse: Coseno, Arcocoseno.

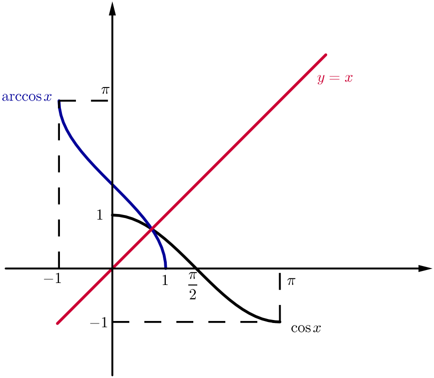


Figure: Grafico di $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ (in nero); grafico di $[-1, 1] \xrightarrow{\text{arcos}} [0, \pi]$ (in blu).

Teorema di Weierstrass

Teorema (Weierstrass)

Una funzione $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato)* $I = [a,b]$ *è limitata.*
Inoltre esistono nell'intervallo I *un punto nel quale la funzione assume il suo valore massimo e un punto nel quale la funzione assume il suo valore minimo.*

La tesi afferma che esistono in $[a,b]$ (almeno) un punto p e (almeno) un punto q per i quali si ha, per ogni $x \in [a,b]$,

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p) \tag{1}$$

Osservazione

Corollario del teorema di Weierstrass

Se $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato) $[a, b]$, allora la sua immagine $f([a, b])$ è anch'essa un intervallo compatto:

$$f([a, b]) = [m, M] \tag{2}$$

dove m e M sono il minimo valore e il massimo valore di f sul suo dominio $I = [a, b]$.