LEZIONE 13
Introduzione al calcolo integrale

Indice:

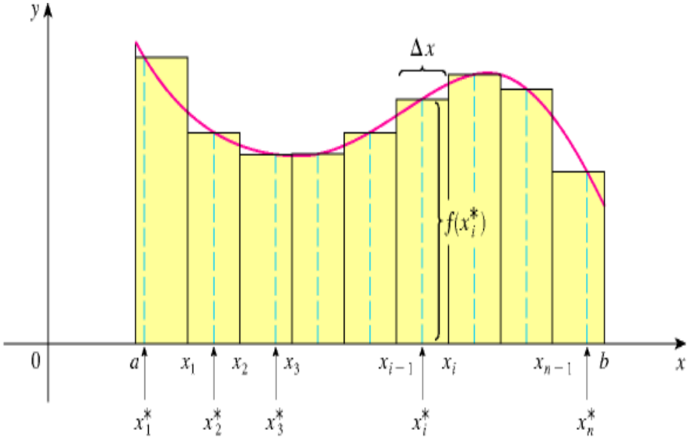
- Integrale di Riemann.
- Prime proprietà delle funzioni integrabili.
- Integrale orientato.
- Teorema della media integrale

I due problemi fondamentali del Calcolo Infinitesimale.

1^o Problema. (Derivata) Data la lunghezza dello spazio percorso in ogni istante di tempo, determinare la velocità in ogni istante.

2^o Problema. (Integrale) Data la velocità del moto a ogni istante, trovare la lunghezza dello spazio percorso a ogni istante di tempo.

Integrale: “Somma totale di parti ‘infinitesimali”



Integrale: “Somma totale di parti ‘infinitesimali”

Definizione (Integrale come limite di somme (Riemann, 1854))

L’integrale di $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è (se esiste) il “limite”:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

dove $|\Delta| = \max\limits_{i=1,\dots,m} \Delta x_i$ *è la massima lunghezza dei sotto-intervalli della partizione* $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Esempio di integrazione: calcolo dello spazio percorso

Moto di un punto su un retta.

- Coordinata al tempo t: $s(t)$. Posizione iniziale: $s(t_0)$
- Velocità in t: $v(t) = s'(t)$ (qui si suppone $v(t)$ continua)
- Spazio percorso nell'intervallino di tempo Δt_i : $v(t_i^*)\Delta t_i$
- Spazio totale percorso da t_0 a t: $s(t) - s(t_0)$
  "Uguaglianza approssimata":

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_i v(t_i^*)\Delta t_i$$

Uguaglianza vera:

$$s(t) - s(t_0) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i v(t_i^*)\Delta t_i = \boxed{\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau}$$

Formula di Newton-Leibniz

Dalla conclusione dell'esempio precedente

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau \;=\; s(t) - s(t_0)}$$

segue la:

Formula di Newton-Leibniz

Se $s(t)$ è una funzione la cui derivata è $v(t)$, cioè $s'(t) = v(t)$, allora

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \;=\; \int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau \;=\; s(t) - s(t_0)}$$

Questa formula (che verrà dimostrata di nuovo più avanti) è lo strumento fondamentale per il calcolo degli integrali.

Teoria della integrazione secondo Riemann.

Nella teoria dell'integrazione secondo Riemann, si considerano (almeno inizialmente) funzioni $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, soddisfacenti le condizioni seguenti:

1. f è limitata su $[a, b]$, cioè: esiste una costante reale K per la quale
$$|f(x)| \leq K$$
per ogni x in $[a, b]$;
2. Il dominio di integrazione è un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato.

Somme inferiori e superiori. (Facoltativo).

- $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo compatto $[a, b]$.
- Sia P una partizione dell'intervallo $[a, b]$:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m = b$$

- Poniamo:

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} \\
M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\} \\
S^-(f; P) &= \sum_{i=1}^{m} m_i(a_i - a_{i-1}) \\
S^+(f; P) &= \sum_{i=1}^{m} M_i(a_i - a_{i-1})
\end{aligned}$$

Le $S^-(f; P)$ e le $S^+(f; P)$ si chiamano rispettivamente somme inferiori e somme superiori della funzione f relative alla partizione P.

Integrale inferiore e superiore. (Facoltativo).

- Si dimostra facilmente che ogni somma inferiore $S^-(f;P_1)$ è minore o uguale di ogni somma superiore $S^+(f;P_2)$, quali che siano le partizioni P_1, P_2.
- Per definizione, l'integrale inferiore $\underline{I}(f)$ e l'integrale superiore $\overline{I}(f)$ su $[a,b]$ sono rispettivamente i numeri

$$\begin{aligned} \underline{I}(f) &= \sup\{\text{Tutte le somme inferiori } S^-(f;P),\ P \in \mathcal{P}\} \\ \overline{I}(f) &= \inf\{\text{Tutte le somme superiori } S^+(f;P),\ P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

  Qui $\mathcal{P}$ denota l'insieme di tutte le possibili partizioni di $[a,b]$.
- Ovviamente

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$$

  Se $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, f si dice integrabile su $[a,b]$ e $\underline{I}(f) (= \overline{I}(f))$ si denota $\int_a^b f$ e si chiama integrale definito di f (su $[a,b]$).

Definizione di integrale. (Facoltativo).

Definizione (Integrale: Valore comune dell'integrale inferiore e dell'integrale superiore)

Una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*, limitata sull'intervallo compatto* $[a, b]$*, si dice* *integrabile* *(secondo Riemann) su* $[a, b]$*, se*

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \tag{1}$$

ossia se il suo integrale inferiore e il suo integrale superiore sono uguali. Se questo avviene, il comune valore (1) si chiama *integrale di* f *su* $[a, b]$ *e si denota* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$*.*

Si dimostra che questa seconda definizione di integrale è equivalente alla definizione in termini di somme di Riemann.

Un esempio di funzione non integrabile

La funzione di Dirichlet $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

è limitata, ma non è Riemann-integrabile, perché in ogni sottointervallo di $[0,1]$ ci sono sia numeri razionali che irrazionali, e quindi le somme inferiori di Darboux valgono zero, mentre le somme superiori di Darboux valgono 1.
Questa funzione è discontinua in ogni punto del suo dominio.

Classi di funzioni integrabili su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$

Teorema (Integrabilità delle funzioni monotòne)

Ogni funzione monòtona su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è integrabile su $[a, b]$.

Teorema (Integrabilità delle funzioni continue)

Se f è una funzione reale continua su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, allora f è integrabile su $[a, b]$.

Quest'ultimo teorema si generalizza:

Teorema (Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione limitata con un numero finito di punti di discontinuità. Allora f è integrabile.

Proprietà dell'integrale (1)

$\mathcal{R}[a, b] =$ spazio delle funzioni Riemann-integrabili su $[a, b]$.

1. Additività rispetto alla funzione integranda. Per ogni $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

2. Omogeneità . Per ogni $f \in \mathcal{R}[a, b]$, e per ogni numero reale λ

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

3. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Per ogni $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Proprietà dell'integrale. (2)

4. Monotonia. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ e $f_1(x) \leq f_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f_1(x)\, dx \leq \int_a^b f_2(x)\, dx$$

5. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $M \in \mathbb{R}$ è un numero tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b - a)$$

Proprietà dell'integrale. (3)

6 Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, allora anche $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

7 Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, allora anche il loro prodotto $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Integrale orientato

Definizione (Integrale orientato)

Se $a > b$, si pone, per definizione,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Con questa definizione di integrale orientato, l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

vale per ogni scelta di a, b, c (qualunque sia la posizione reciproca di a, b e c).

Teorema della Media Integrale

Teorema (della Media Integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Se m e M denotano, nell'ordine, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[a,b]$

$$m = \inf\ f \qquad\qquad M = \sup\ f$$

allora

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \tag{2}$$

Se inoltre f è continua, esiste un punto c in $[a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \tag{3}$$

Dimostrazione (Media Integrale)

Per ogni $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Segue (proprietà di monotonia dell'integrale):

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Di qui segue subito la tesi (2).

Dimostrazione (Media Integrale)

Sia f continua su $[a, b]$.
Dalle disuguaglianze (2), si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

Poiché f è continua, assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore (m) e il suo estremo superiore (M).

Quindi esiste un punto c tra a e b per il quale vale (3). Q.E.D.