Teorema fondamentale del calcolo integrale

Indice:

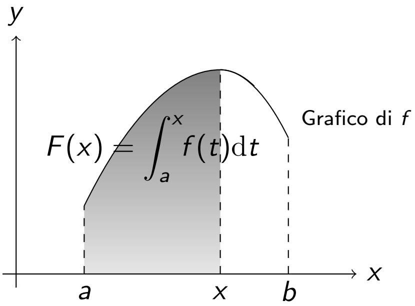
- Funzione integrale.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale.

La funzione integrale

Definizione

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *integrabile su* $[a, b]$. *Si chiama* *funzione integrale di* f *la funzione* $[a, b] \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ *definita nel modo seguente: per ogni* $x \in [a, b]$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{1}$$



$F(x)$ = area sotto il grafico di f tra a e x.

Continuità della funzione integrale

Teorema (Continuità della funzione integrale)

Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$. *Allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{2}$$

è continua su $[a, b]$.

Dimostrazione (Continuità della funzione integrale)

Dimostrazione. Poiché $f \in \mathcal{R}[a, b]$, Ã¨ limitata, cioè esiste una costante $K > 0$ per cui $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$ arbitrario. Allora, per ogni $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x f \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x K \right| \\
&= K|x - x_0|
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta = \varepsilon/K$, si ha $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Dunque F è continua in x_0. Q.E.D.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (TFCI)

Teorema (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora:*

1. *La funzione integrale di* f
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{3}$$
è una antiderivata di f*, ossia è derivabile e* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$*:*
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x) \tag{4}$$

2. *Se* G *è una qualunque antiderivata di* f *su* $[a, b]$*, ossia* $G'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$*, allora*
$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) \tag{5}$$

Dimostrazione del Teorema Fondamentale

1) Fissiamo un punto x in $[a, b]$. Allora

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \tag{6}$$

dove c è un opportuno punto tra x e $x+h$. La (6) segue dal Teorema della Media Integrale, applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$. Quando h tende a zero, il punto c, compreso tra x e $x+h$, tende a x. Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \tag{7}$$

Dunque $F'(x) = f(x)$. Q.E.D.

Dimostrazione del Teorema Fondamentale (Continua)

2) Sia ora $G(x)$ una qualunque funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

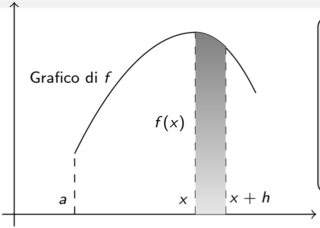
le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hanno la stessa derivata sull'intervallo $[a, b]$. Quindi differiscono per una costante:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \tag{8}$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \left[\int_a^b f(t)\,dt + c\right] - \left[\int_a^a f(t)\,dt + c\right] && (9) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt && (10) \end{aligned}$$

Dimostrazione del TFCI (in breve)



Supponiamo f continua. Definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$
$$= \text{Area sotto il grafico di } f \text{ da } a \text{ fino a } x$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\text{Area del `rettangolino' grigio}}{\text{Base}}$$

Esiste $x^* \in [x, x+h]$:

$$= \frac{h\,f(x^\star)}{h} = f(x^\star) \to f(x)$$

(per $h \to 0$). Segue:

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Se f è continua,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(u)\,du\right] = f(x)$$