Metodi di integrazione

Indice:

- Integrazioni immediate.
- Integrazione per parti.
- Integrazione per sostituzione.

Integrazioni immediate

Dalla regola di derivazione della funzione composta

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int g'(f(x))f'(x)\,dx = g\big(f(x)\big) + c$$

Come si declina la regola delle integrazioni immediate.

Funzioni	Primitive
$[f(x)]^\alpha f'(x)$, $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\,[f(x)]^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$f'(x)\,e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$f'(x)\,a^{f(x)} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\,a^{f(x)} + c$

Come si declina la regola delle integrazioni immediate.

Funzioni	Primitive
$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$\dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2}$	$\tan f(x) + c$

Come si declina la regola delle integrazioni immediate.

Funzioni	Primitive
$\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan f(x)+c$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arcsin f(x)+c$

Integrazione per parti

Teorema (Integrazione per parti)

Siano $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili sullo stesso intervallo I. Allora valgono:

- *la formula di integrazione per parti per l'integrale indefinito:*

$$\int f\, g' = fg - \int f'\, g \tag{1}$$

- *la formula di integrazione per parti per l'integrale definito:*

$$\int_a^b f\, g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'\, g \tag{2}$$

Dimostrazione. (Integrazione per parti)

Dimostrazione. Per la regola (di Leibniz) della derivata del prodotto,

$$(fg)' = f' g + f g' \tag{3}$$

Integrando da entrambi i membri si ricava:

$$\int (f g)' \;=\; \int f' g + \int f g' \tag{4}$$

Poiché ovviamente una primitiva di $(f g)'$ è $f g$, da (4) si ottiene:

$$\begin{aligned} (f g) &= \int f' g + \int f g' \\ \int f g' &= f g - \int f' g \end{aligned} \tag{5}$$

Q.E.D.

Integrazione per parti: due esempi.

Esempio

Utilizzando la regola di integrazione per parti, calcolare:

$$\int \log x \, dx$$

Indicando la derivata prima di una qualsiasi funzione φ con il simbolo $D[\varphi]$, la regola di derivazione per parti assume la seguente forma:

$$\int f \, D[g] = f \, g - \int D[f] \, g$$

Pensando $\log x$ come il prodotto di $\log x$ per il numero 1. Si ottiene:

Integrazione per parti: due esempi.

$$
\begin{aligned}
\int (\log x) \cdot 1 \; dx &= \int (\log x) \cdot D[x] \; dx \\
& x \cdot \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \; dx \\
& x \cdot \log x - x + c
\end{aligned}
$$

Integrazione per parti: due esempi.

Esempio

Utilizzando la regola di integrazione per parti, calcolare:

$$\int x\, e^x\, dx$$

$$\begin{aligned} \int x\, e^x\, dx &= \int x\, D[e^x]\, dx \\ &= x\, e^x - \int e^x\, dx \\ &= x\, e^x - e^x + c \end{aligned}$$

Cambio di variabili negli integrali indefiniti.

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Siano $I \xrightarrow{\varphi} \varphi(I)$ una funzione derivabile e $\varphi(I) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, con primitiva F. Allora la funzione $(f(\varphi(x))\varphi'(x), \;\; x \in I, \;$ ha come primitiva la funzione $F(\varphi(x))$. In breve, si scrive:

$$\begin{aligned} \int (f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx &= \left[\int f(y)\, dy\right]_{y=\varphi(x)} \\ &= F(\varphi(x)) + c \end{aligned}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Formalmente, si pone $y = \varphi(x)$ e $dy = \varphi'(x)\, dx$. La notazione di Leibniz $\displaystyle\int f(y)\, dy$ è dunque utile come regola mnemonica per arrivare al risultato giusto.

Dimostrazione (facoltativa).

Dimostrazione. Il teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che la funzione composta $F \circ \varphi$ è derivabile su I e

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

Ne segue che una primitiva di

$$f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

è

$$F(\varphi(x))$$

Q.E.D.

Esempio di cambio di variabili negli integrali indefiniti.

Esempio

Utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione, calcolare:

$$\int \frac{1}{x\,(\log x - 4)}\,dx$$

(il logaritmo si intende in base e).

Posto $y = \log x - 4$, si ha: $dy = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\,(\log x - 4)}\,dx &= \int \frac{1}{y}\,dy \\ &= \log y \\ &= \log[\log x - 4] + c \end{aligned}$$

Esempio di cambio di variabili negli integrali definiti.

Esempio

Calcolare:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = \sin\vartheta = \varphi(\vartheta) \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$
$dx = \varphi'(\vartheta)\,d\vartheta = \cos\vartheta\,d\vartheta$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\vartheta}\,\cos\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

Poiché una primitiva di $\cos^2\vartheta$ è

$$\int \cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta),$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \pi/4$$

Cambio di variabili negli integrali definiti

Teorema

Siano dati:

$$\begin{tikzcd} {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "f\circ\varphi"'] & {[a,b]} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- *Una funzione continua* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$;
- *Un cambio di parametro* $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b]$ *derivabile,* $\vartheta \longmapsto \varphi(\vartheta) = x$. *Supponiamo:* $\quad \varphi(\alpha) = a, \ \ \varphi(\beta) = b$

Allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Dimostrazione (facoltativa).

Sia F una primitiva di f: $\quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$. Allora

$$\frac{d}{d\vartheta} F(\varphi(\vartheta)) = F'\left(\varphi(\vartheta)\right)\,\varphi'(\vartheta) = f\left(\varphi(\vartheta)\right)\,\varphi'(\vartheta)$$

Dunque $F\left(\varphi(\vartheta)\right)$ è una primitiva di $f\left(\varphi(\vartheta)\right)\,\varphi'(\vartheta)$.
Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

Q.E.D.

Esempio di cambio di variabili negli integrali definiti.

Esempio

Calcolare:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin\vartheta = \varphi(\vartheta) \qquad 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le \vartheta \le \pi/2$

$dx = \varphi'(\vartheta)\, d\vartheta = \cos\vartheta\, d\vartheta$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\vartheta}\, \cos\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

Poiché una primitiva di $\cos^2\vartheta$ è

$$\int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta),$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \pi/4$$