# LEZIONE 16
## Integrali generalizzati (o impropri)

Indice:

- Definizione degli integrali generalizzati.
- Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$ e in un intorno di 0.
- Criterio del confronto.
- Criterio del confronto asintotico.
- Alcuni esercizi sulla convergenza di integrali generalizzati.

# Integrali generalizzati, o impropri

Sono definiti come opportuni limiti di ordinari integrali di Riemann. Un integrale si dice generalizzato in uno di questi casi:

1. Dominio di integrazione non limitato. Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.
2. Funzione integranda non limitata. Esempio: $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.
3. Entrambe le cose insieme. Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx$.

# Definizione degli integrali generalizzati

**Definizione (Integrale di funzione limitata su dominio non limitato)**

*Sia* $[a, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *limitata su* $[a, +\infty)$ *non limitato.*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \textit{significa:} \qquad \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x)\, dx$$

**Definizione (Integrale di funzione non limitata su un dominio limitato)**

*Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *con dominio limitato* $[a, b]$*, non limitata in un intorno destro di* $a$*.*

$$\int_a^{b} f(x)\, dx \qquad \textit{significa:} \qquad \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)\, dx$$

# Funzione limitata su intervallo non limitato. Esempio.

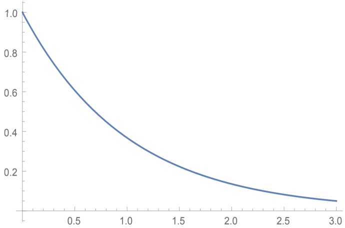


Figure: $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx &= \lim_{k\to+\infty} \int_0^k e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left(-e^{-k} + 1\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

# Funzione limitata su intervallo non limitato. Esempio.

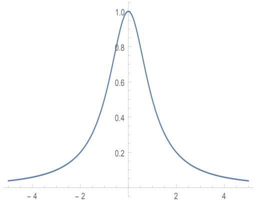


Figure: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{h\to-\infty}\int_h^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{h\to-\infty}[\arctan x]_h^0 + \lim_{k\to+\infty}[\arctan x]_0^k \\
&= \pi/2 + \pi/2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

# Funzione non limitata su intervallo limitato. Esempio.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{k\to 0^+}\int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{k\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_k^1 \\
&= \lim_{k\to 0^+} 2-2\sqrt{k} \\
&= 2
\end{aligned}$$

# Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$.

**Teorema (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$)**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \textit{diverge (a } +\infty\textit{)} & \text{se } a \leq 1 \\ \textit{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

# Dimostrazione (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$).

Se $a = 1$, abbiamo

$$\lim_{k \to +\infty} \int_1^k \frac{1}{x}\,dx = \lim_{k \to +\infty} (\ln k - \ln 1) = +\infty$$

e quindi l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ vale $+\infty$, ossia è divergente.
Se $a \neq 1$, si ha:

$$\int_1^k \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}\left[x^{1-a}\right]_1^k = \frac{1}{1-a}(k^{1-a} - 1)$$

Allora:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{1-a}(k^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Q.E.D.

# Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di 0.

**Teorema (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di 0)**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \textit{diverge (a } +\infty\textit{)} & \textit{se } a \geq 1 \\ \textit{converge} & \textit{se } a < 1 \end{cases}$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema sulla integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$.

# Criterio del confronto

**Teorema (Criterio del confronto.)**

*Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano funzioni continue definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$ e soddisfacenti*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{1}$$

*Allora:*

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{2}$$

*In particolare:*

1. *Se* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *è convergente, anche* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *è convergente;*
2. *Se* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *non è convergente, anche* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *non è convergente;*

# Criterio del confronto asintotico

**Teorema (Criterio del confronto asintotico.)**

*Siano $f$ e $g$ funzioni continue e positive definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$. Supponiamo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$. Allora $f$ è integrabile (in senso generalizzato) a $+\infty$ se, e solo se, $g$ lo è.*

## Dimostrazione (Confronto asintotico)

Per ipotesi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Questo significa: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $(M, +\infty)$ di $+\infty$ tale che, per ogni $x \in (M, +\infty)$,

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \varepsilon$$

cioè

$$(1 - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)g(x) \tag{3}$$

Da (3) e dal Criterio del Confronto, segue subito la tesi. Infatti: (a) Se $g(x)$ è integrabile a $+\infty$, da

$$f(x) \leq (1 + \varepsilon)g(x)$$

segue che anche $f(x)$ lo è; (b) Se $g(x)$ non è integrabile a $+\infty$, da

$$(1 - \varepsilon)g(x) \leq f(x)$$

segue che anche $f(x)$ non è integrabile a $+\infty$. Q.E.D.

# Esercizi sulla convergenza di integrali generalizzati

## Esercizio

*Dire se i seguenti integrali sono convergenti (cioè, sono numeri reali), oppure no.*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ *(Si può calcolare il valore numerico?)*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ *(Si può calcolare il valore numerico?)*
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x}\,dx$ *Più in generale:* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^8}}\,dx$