

# Infiniti



Breve introduzione alle idee di G. Cantor

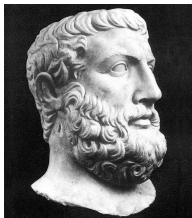
*"Nessuno deve poterci scacciare dal paradiso  
che Cantor ha creato per noi."*

*D. Hilbert*

## Indice degli argomenti

- Paradosso di Zenone
- Paradosso degli interi positivi e dei loro quadrati (Galileo)
- Definizione di insieme infinito.
- Insiemi numerabili.
- $\mathbb{R}$  non è numerabile. La cardinalità del continuo.
- Un intervallo piccolo a piacere ha la stessa cardinalità dell'intero spazio.

# Paradosso di Zenone

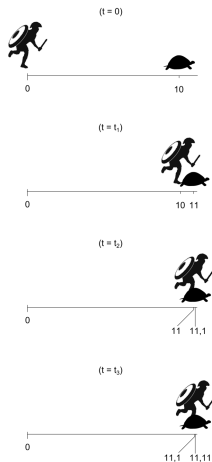


Zenone di Elea

*"[...] Il secondo argomento è quello detto di Achille. Eccolo: il più lento corridore non sarà mai raggiunto nella sua corsa dal più veloce. Infatti sarà necessario che l'inseguitore proceda fin là donde si è mosso il fuggitivo, sicché è necessario che il corridore più lento si trovi sempre un po' più innanzi"*

Aristotele

# Paradosso di Zenone



Achille insegue la tartaruga e, all'istante  $t_0 = 0$ , ha 10 metri di vantaggio; la velocità di Achille è  $v_A = 10$  m/s e quella della tartaruga è  $v_T = 1$  m/s.

All'istante  $t_1 = 1$  s Achille raggiunge il punto in cui si trova inizialmente la tartaruga; intanto la tartaruga (pur lentamente) si è mossa e ha percorso uno spazio uguale a un metro.

Per raggiungere la nuova posizione della tartaruga, Achille dovrà impiegare dell'altro tempo: esattamente  $\frac{1}{10}$  s. In tutto avrà impiegato un tempo

$$t_2 = 1 + \frac{1}{10} = 1,1 \text{ s}$$

## L'argomentazione di Zenone

Tuttavia Achille non ha ancora raggiunto la tartaruga, perché nell'intervallo di tempo di  $\frac{1}{10}$  di secondo essa ha percorso  $\frac{1}{10}$  di metro.

Achille, per raggiungere questa nuova posizione impiegherà  $\frac{1}{100}$  s ossia un tempo complessivo di

$$t_2 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 1,11 \text{ s}$$

e così via.

In questo modo Zenone credeva di aver dimostrato che Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga e che il moto è qualcosa di illusorio.

## Spiegazione del paradosso

L'esperienza ci insegna che le cose vanno diversamente: la posizione di Achille nell'istante  $t$  in cui raggiunge la tartaruga è

$$s = v_A \cdot t = 10 \cdot t$$

Ovviamente tale posizione deve coincidere con quella della tartaruga che è uguale alla somma del vantaggio iniziale con lo spazio  $v_T \cdot t = 1 \cdot t$  che essa percorre

Si ottiene:

$$10t = 10 + t$$

Quindi Achille raggiunge la tartaruga esattamente nell'istante:

$$t = \frac{10}{9} \text{ s} = 1,1111\dots \text{ s} = 1, \bar{1} \text{ s}$$

# Paradosso di Galileo



Galileo Galilei

SALVIATI - Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si moltiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

SIMPLICIO - Non si può dir altrimenti.

## Paradosso di Galileo

SALVIATI - Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.

SIMPLICIO - Così sta.

SALVIATI - Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri [...]

SAGREDO - Che dunque si ha da determinare in questa occasione?



SALVIATI - Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, **gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.**

G. Galilei

*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*

# Una parte può essere “uguale ” al tutto

## Definizione (Insieme infinito)

Si dice che un insieme  $X$  è **infinito** se esiste una endo-funzione

$$X \xrightarrow{f} X$$

*iniettiva e non suriettiva.*

In altre parole,  $X$  è infinito se esiste e una funzione bi-iettiva

$$X \xrightarrow{f} S$$

dove  $S$  è un **sottoinsieme proprio** di  $X$ .

# Insiemi con la stessa cardinalità

## Definizione

Due insiemi  $X, Y$  hanno la **stessa cardinalità** (sono isomorfi) se esiste una funzione bi-iettiva (un isomorfismo)

$$X \xrightarrow{f} Y$$

## Definizione (Insieme numerabile)

Si dice che un insieme  $S$  è *numerabile*, o che *ha la stessa cardinalità di  $\mathbb{N}$* , se esiste una funzione bi-iettiva (o invertibile; cioè iniettiva e suriettiva)  $\mathbb{N} \xrightarrow{f} S$ .

La cardinalità degli insiemi numerabili si indica con il simbolo  $\aleph_0$ , si legge: 'alef con zero'. ( $\aleph$  è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

## Insiemi numerabili = Insiemi di cardinalità $\aleph_0$

Sono numerabili (hanno cardinalità  $\aleph_0$ ) gli insiemi:

- 1  $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  (numeri interi relativi).
- 2  $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  (numeri positivi pari).
- 3  $B = \{\dots - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$  (numeri interi relativi pari).
- 4  $C = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  (numeri interi positivi dispari).
- 5  $D = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$  (quadrati perfetti).

Inoltre, vale il seguente fatto, del tutto non intuitivo ...

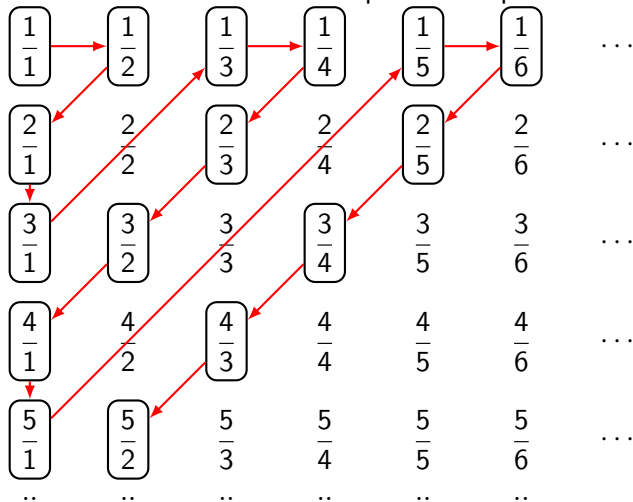
$\mathbb{Q}$  è numerabile (ha cardinalità  $\aleph_0$ )

Teorema ( G. Cantor, 1873.)

$\mathbb{Q}$  è *numerabile*.

# DIMOSTRAZIONE. (Primo metodo diagonale di G. Cantor)

Ordiniamo i numeri razionali positivi in questo modo:



## DIMOSTRAZIONE. ( $\mathbb{Q}$ è numerabile.)

Aggiungiamo lo zero e eliminiamo i numeri che figurano già in precedenza. Otteniamo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
0	1	1	2	3	1	1	2	3	4	5	1	...
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5}$	...

Ora modifichiamo la successione appena costruita introducendo i razionali negativi:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
0	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	1	-1	1	...
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

In questo modo abbiamo costruito una funzione bi-iettiva  $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$ .  
Dunque  $\mathbb{Q}$  è numerabile. □



# $\mathbb{R}$ non è numerabile

Teorema (G. Cantor, 1890)

*L'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali non è numerabile.*

# DIMOSTRAZIONE. (Secondo argomento diagonale di G. Cantor)

Basta provare che  $[0, 1]$  non è numerabile. Supponiamo il contrario, e sia  $\mathbb{N} \xrightarrow{f} [0, 1]$  una funzione bi-iettiva:

$$1 \leftrightarrow f(1) = 0. \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots \alpha_n^1 \dots$$

$$2 \leftrightarrow f(2) = 0. \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_n^2 \dots$$

.....

$$n \leftrightarrow f(n) = 0. \alpha_1^n \alpha_2^n \alpha_3^n \dots \alpha_n^n \dots$$

.....

Questo significa che ogni numero reale in  $[0, 1]$  **figura una volta (suriettività)** e una sola (iniettività) nella colonna di destra.

## DIMOSTRAZIONE. (Secondo argomento diagonale di G. Cantor)

Definiamo  $b = 0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots \in [0, 1]$ , ponendo:

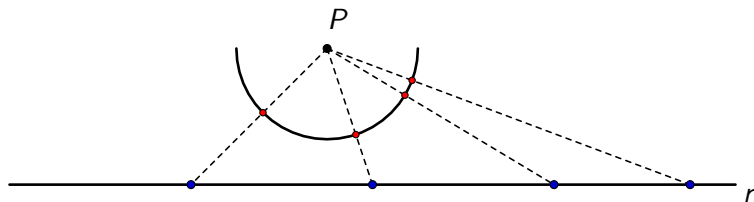
$$\beta_n = \begin{cases} 7 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre } 0, 1, 2, 3, 4, \\ 3 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre } 5, 6, 7, 8, 9. \end{cases}$$

Il numero  $b$  **non figura** nella lista di sopra (La  $n$ -esima cifra di  $b$  e  $f(n)$  sono diverse). Contraddizione. Q.E.D.

# La cardinalità del continuo

## Definizione (Insieme con la cardinalità del continuo)

Si dice che un insieme  $S$  ha la **cardinalità del continuo**, o che **ha la stessa cardinalità** di  $\mathbb{R}$ , se esiste una funzione bi-iettiva (o invertibile; cioè iniettiva e suriettiva)  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} S$ .



**Figure:** Corrispondenza biunivoca tra i punti di una semicirconferenza e la retta.

“Lo vedo ma non ci credo! ”

Teorema (G. Cantor. 1874)

*Se gli insiemi  $X$  e  $Y$  hanno la cardinalità del continuo allora il loro prodotto cartesiano  $X \times Y$  ha la cardinalità del continuo.*

Quindi  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  hanno la stessa cardinalità di  $\mathbb{R}$ .

Poiché  $\mathbb{R}$  ha la stessa cardinalità di un suo intervallo limitato  $(a, b)$  (è facile trovare una funzione bi-iettiva  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} (a, b)$ ), segue che:

i punti di tutto lo spazio sono “tanti quanti” i punti di un segmento di lunghezza piccola a piacere!

“Lo vedo ma non ci credo!”

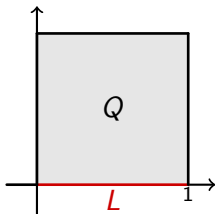
Ci limitiamo a dimostrare che i punti del quadrato

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1)\}$$

sono **tanti quanti** i punti del suo lato

$$L = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 1\}$$

Dimostrazione. Si tratta di esibire una funzione bi-iettiva  $Q \xrightarrow{f} L$ . Identifichiamo un qualsiasi punto del quadrato con una coppia (ordinata)  $(x, y)$  di numeri reali e scriviamo le coordinate  $x$  e  $y$  utilizzando la loro rappresentazione decimale.



“Lo vedo ma non ci credo! ”

Alla coppia

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$$

$$y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$$

associamo il numero (reale)  $t$ ,  $0 < t < 1$  così definito:

$$t = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

Viceversa, a ogni  $t = 0, t_1 t_2 t_3 \dots$  associamo la coppia  $(x, y)$  dove  $x$  è il numero formato dalle cifre di  $t$  di posto **dispari** mentre  $y$  da quelle di posto **pari**

$$x = 0, t_1 t_3 t_5 t_7 \dots$$

$$y = 0, t_2 t_4 t_6 t_8 \dots$$

Q.E.D.