

LEZIONE 1

Funzioni reali di variabile reale

Definizione (Funzione reale di variabile reale)

Una **funzione** f da A in B ($A \xrightarrow{f} B$) consiste di:

- 1 un sottoinsieme A di \mathbb{R} detto **dominio** della funzione;
- 2 un sottoinsieme B di \mathbb{R} detto **codominio** della funzione;
- 3 una **regola o azione** f che assegna ad **ogni** elemento a del dominio un **unico** elemento b del codominio.

L'elemento b si chiama **immagine** di a tramite f e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: “ f di a ”).

Definizione (Immagine di una funzione)

Si chiama *immagine* $Im f$ della funzione $A \xrightarrow{f} B$ il sottoinsieme del codominio

$$Im f = \{y \in B \mid \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

Definizione (Controimmagine)

Sia b un elemento del codominio della funzione $A \xrightarrow{f} B$. Si chiama *controimmagine di b mediante f* (e si scrive " $f^{-1}(b)$ ") il sottoinsieme di A così definito

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

L'insieme $f^{-1}(b)$ si chiama anche *fibra di f sull'elemento b* . Esso può essere formato da uno o più elementi oppure coincidere con l'insieme vuoto.

Definizione (Grafico di una funzione)

Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione. Il **grafico** G_f di f è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

Definizione (Zeri di una funzione)

Gli **zeri** della funzione

$$A \xrightarrow{f} B, y = f(x)$$

$(A, B \subseteq \mathbb{R})$ sono gli elementi $x \in A$ per i quali risulta

$$f(x) = 0$$

Gli zeri di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con l'asse x .

Definizione (Funzione pari)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è **pari** se vale la proprietà

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$

Se f è pari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 0$ (asse y).

Definizione (Funzione dispari)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è **dispari** se vale la proprietà

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$$

Se f è dispari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani.

Teorema

Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale allora

- 1** Se f e g sono pari allora fg è pari
- 2** Se f e g sono dispari allora fg è pari
- 3** Se f è pari e g è dispari allora fg è dispari

Attenzione: la funzione $h = fg$ indica il prodotto puntuale di funzioni e non la loro composizione.

ESERCIZI

- 1** Determinare il dominio massimale D in \mathbb{R} di

$$f(x) = e^{\sqrt{4-x^2}} \cdot \ln\left(2x - \frac{1}{2}\right)$$

- 2** Determinare il dominio massimale D in \mathbb{R} di

$$f(x) = \sqrt[3]{-3x^3 + 2x}$$

. La funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari? è dispari?

- 3** Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Disegnare il grafico G_f di f . l'insieme $Im f$ è superiormente limitato? è inferiormente limitato? Trovare (se esistono) l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $Im f$.

4 Tracciare il grafico qualitativo di $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}$. f è pari? è dispari? Per quali valori del dominio la funzione è negativa?

5 Tracciare il grafico qualitativo di

$$(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = |\ln x|$$

Determinare sup e inf di $Im f$.

6 Tracciare il grafico qualitativo di

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \ln |x|$$

Per quali valori del dominio la funzione risulta positiva? f è pari? è dispari?

7 Determinare gli zeri della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

8 La funzione

$$\mathbb{R}_{\neq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\neq 0}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?

9 Trovare la funzione inversa di

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, \quad f(x) = e^x$$

e disegnarne il grafico.

10 Trovare la funzione inversa di

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, \quad f(x) = x^2$$

e disegnarne il grafico.

11 Determinare dominio e codominio affinché

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

sia invertibile. Trovare un'espressione analitica della funzione inversa.

12 Si consideri la funzione

$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x - x^2}}{4x^2 - 8x + 3}$$

- Determinare in \mathbb{R} , il dominio massimale D di f
- Per quali $x \in D$, $f(x) > 0$?