Esercizi di probabilità che utilizzano il teorema di Bayes[1]

A cura di: Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

1 Teorema di Bayes

Teorema 1.1. *Sia A un evento di probabilità non nulla e B_1, B_2 due eventi per i quali valgono le seguenti proprietà*

1. $B_1 \cup B_2 = \Omega$, *dove* Ω *è lo spazio degli eventi*
2. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
3. $P(B_1) \neq 0$ *e* $P(B_1) \neq 0$

Allora

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)}$$

e

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)}$$

Il teorema si generalizza al caso di una famiglia $B_1, B_2, \dots B_n$ per la quale

1. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, dove Ω è lo spazio degli eventi;
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$;
3. $P(B_i) \neq 0$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\Sigma_{k=1}^{n}} P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

[1] file .tex: 'teorema_di_bayes.tex'

Un'applicazione tipica del teorema di Bayes: i test diagnostici.

Si elabora una procedura, un test diagnostico, per verificare se un individuo ha una certa patologia oppure no: se il test dà esito positivo l'individuo è malato, se dà esito negativo l'individuo è sano. Ovviamente il test non è infallibile, ossia può capitare che alcuni degli individui risultati positivi siano sani (falsi positivi) oppure che alcuni degli individui risultati negativi siano in realtà malati (falsi negativi). Per valutare l'efficacia del test si sceglie un campione di individui di cui si conosce preventivamente il numero esatto di persone malate e di quelle sane e poi si controlla la risposta del test diagnostico.

Esercizio 1.2 (Tratto da M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone, Matematica.blu 2.0, Vol 4, pag. α99, n. 165.)**.** *Il test del "palloncino" che indica la presenza di alcol nell'organismo, ha esito positivo per il* 4% *delle persone controllate. L'esperienza ha mostrato che, con questa prova, il* 98% *delle persone con risultato positivo era effettivamente in stato di ebrezza e che il* 98% *delle persone con esito negativo non lo era.*

(a) Qual è la probabilità che l'alcol test dia esito positivo per una persona che non ha bevuto?

(b) Qual è la probabilità che l'alcol test dia esito negativo per una persona che ha bevuto?

Soluzione.

Pos indica che "l'alcol test ha dato esito positivo" mentre $\overline{Pos}$ indica che "l'alcol test ha dato esito negativo". A indica "una persona che ha effettivamente bevuto alcolici" $\overline{A}$ indica "una persona che non ha effettivamente bevuto alcolici.

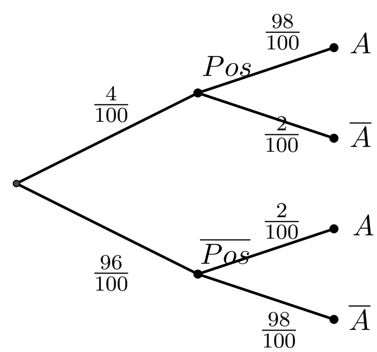

Figura 1

(a) Si tratta di determinare $\mathcal{P}(P|\overline{A})$. Per il teorema di Bayes si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Pos|\overline{A}) &= \frac{\mathcal{P}(Pos)\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|Pos)}{\mathcal{P}(Pos)\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|Pos)+\mathcal{P}(\overline{Pos})\cdot\mathcal{P}(\overline{A}|\overline{Pos})} \\
&= \frac{\frac{4}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{4}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{96}{100}\cdot\frac{98}{100}} \\
&= \frac{8}{9416} \\
&\sim 0.0008
\end{aligned}$$

(b) Si tratta di determinare $\mathcal{P}(\overline{P}|B)$. Per il teorema di Bayes si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\overline{P}|A) &= \frac{\mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P})}{\mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P}) + \mathcal{P}(\overline{P}) \cdot \mathcal{P}(A|\overline{P})} \\
&= \frac{\frac{96}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{4}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{96}{100}} \\
&= \frac{192}{584} \\
&\sim 0.33
\end{aligned}
$$