Uso dell'equivalenza asintotica con la differenza di funzioni[1]

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

1 Un uso sbagliato del simbolo di asintotico

Molte volte si è tentati di usare, per $x \to x_0$, la seguente implicazione

$$f(x) \sim f_1(x) \;\text{ e }\; g(x) \sim g_1(x) \quad \Longrightarrow \quad (f(x) - g(x)) \sim (f_1(x) - g_1(x)) \tag{1.1}$$

che è **falsa!**.

Controesempio.
Sia $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x + 1$. Per x che tende a $+\infty$, $f(x) \sim x$, $g(x) \sim x$ e

$$(f(x) - g(x)) = (x + 2) - (x + 1) = 1$$

mentre dall'implicazione precedente si otterrebbe $(f(x) - g(x)) \sim x - x = 0$ (falso).

L'implicazione (1.1) si può usare solo con l'ipotesi ulteriore: $f_1(x) - g_1(x) \neq 0$. Più precisamente, vale il seguente teorema

$$f(x) \sim f_1(x),\; g(x) \sim g_1(x) \text{ e } f_1(x) \pm g_1(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (f(x) \pm g(x)) \sim (f_1(x) \pm g_1(x))$$

(per $x \to x_0$).

Esempi.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$

   Si può affermare correttamente che $\sqrt{x^2 + x} \sim -x$ ma questo non autorizza a sostituire $\sqrt{x^2 + x}$ con $-x$ nella somma $\sqrt{x^2 + x} + x$. In questo modo si ottiene

   $$\sqrt{x^2 + x} + x = -x + x = 0$$

   e quindi, si deduce che il limite vale zero. Errore!

[1] Nome file: "uso_sbagliato_di_asintotico.tex"

Soluzione corretta. Per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+x}+x \\
& \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x \\
& -x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+x \\
& -x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+x \\
&\to -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

   Per $x \to 0$, $\sin x \sim x$. Tuttavia, sostituendo $\sin x$ con x nella somma $x - \sin x$ si otterrebbe:

$$\frac{x-\sin x}{x^3} \sim \frac{x-x}{x^3} = \frac{0}{x^3} \to 0$$

   che è sbagliato!

   Soluzione corretta. Per $x \to +0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{x-\sin x}{x^3} \\
& \frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^3} \\
& \frac{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x^3} \\
& \frac{1}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3}
\end{aligned}$$

   Quindi, il valore corretto del limite è $\frac{1}{6}$. (Si ottiene lo stesso risultato iterando più volte il teorema di de l'Hôpital).