CORREZIONE VERIFICA 17. 11. 2020

LIMITI E CONTINUITÀ

1. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x + 1}{27x^3 - 1}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^3}\left(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(27 - \frac{1}{x^3}\right)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

2. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{e^x + \sin x}$ ha asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) di equazione $y = 0$, infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + \sin x} = 0$$

3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}}{\sin \frac{1}{x}}$$

per $x \to +\infty$, $$f(x) = \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x\left[1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - x\left[1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x} + \frac{1}{2x} - \cancel{x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} \to -\frac{1}{2}$$

4. $$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Per $x \to -\infty$ $$f(x) = -x\left[1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= -x - \frac{1}{2} + o(1)$$

$y = -x - \frac{1}{2}$ è l'eq. dell'asintoto obliquo (per $x \to -\infty$)

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}-1}$

Per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + o(x^2)}{\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1}} \longrightarrow 2$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

Per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \dfrac{\cancel{x}\left(3 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{o(x)}{x}\right)}$

$$= \frac{3 + o(1)}{2 + o(1)} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+5x)}$

Per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\cancel{1} + x + o(x) \cancel{-1}}{5x + o(x)} \longrightarrow \dfrac{1}{5}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + x^2}{\sin 2x^2}$

Per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \cancel{-1} + x^2}{2x^2 + o(x^2)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

9. Siano f, g due funzioni per le quali $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ Allora:

- $f(x) \sim g(x)$. FALSO Controesempio: $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ FALSO. Controesempio:

$f(x) = x$ e $g(x) = x^2$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste. FALSO Controesempio

(ancora quello del caso precedente)

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$. FALSO Controesempio

$f(x) = x + 1$ $g(x) = x$ In questo caso:

$f(x) - g(x) = 1$ (funzione costante di valore 1)

Nessuna delle altre risposte è corretta. (VERO)

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\, e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$

Posto $\frac{1}{x} = t$ $\lim_{x \to 0} \frac{x\, e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t + te^t} =$

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\cancel{e^t}}{\cancel{e^t}\left(t + \frac{t}{e^t}\right)} = 0$

$\swarrow$ 0

Quindi f è continua in $x = 0$ per $c = 0$.

11. $$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} .$$

Allora la funzione f si può estendere con continuità in $x = 1$, ponendo $f(1) = \frac{1}{2}$.

In altre parole, un'estensione continua g di f .
$\mathbb{R} \setminus \{5\}$ esiste: basta porre $g(1) = \frac{1}{2}$.