IIS CREMONA

Liceo Scientifico "L. Cremona" (Milano).

Classe: 5E. Docente: Mauro Saita. Data: ____________

FUNZIONI DERIVABILI

Test di autovalutazione 1

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul proprio quaderno.[1]

1. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $f'(x)$ delle funzioni seguenti. Precisare, infine, il dominio di $f'(x)$.

   (a) $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$;

   (b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$;

   (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^7}}$;

   (d) $f(x) = 2^x$

   (e) $f(x) = e^{x^2} \ln(1 + x^2)$

   (f) $f(x) = e^{\sin x^3}$

2. Si consideri la funzione $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

   Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x = 2$.

3. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$. Dire per quali punti del grafico di f la tangente risulta:

   (a) parallela alla retta $y = 2x$;

   (b) perpendicolare alla retta $y = -x + 3$

4. La legge oraria di un corpo in caduta libera (in prossimità della superficie terrestre) è

$$s(t) = 10 + 3t + \frac{1}{2}gt^2$$

   dove s indica la posizione del corpo, t il tempo e g l'accelerazione di gravità. Qual è la velocità del corpo all'istante $t = 4$? Si supponga s misurata in metri e t in secondi.

[1] File tex: test03_derivate_2023.tex

5. Spiegare il concetto di derivata facendo alcuni esempi tratti dalla teoria elettromagnetica.

6. L'area del cerchio di raggio r è $A(r) = \pi r^2$ e la sua derivata è

$$A'(r) = 2\pi r$$

   ossia la lunghezza della circonferenza di raggio r. Interpretare geometricamente questo fatto servendosi di un disegno.

IIS CREMONA

Liceo Scientifico "L. Cremona" (Milano).

Classe: 5E. Docente: Mauro Saita. Data: ____________

FUNZIONI DERIVABILI

TEST DI AUTOVALUTAZIONE 2

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul proprio quaderno.[2]

1. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $f'(x)$ delle funzioni seguenti. Precisare, infine, il dominio di $f'(x)$.
   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$;
   (b) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$;
   (c) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 1}$;
   (c) $f(x) = x^2 \ln x$;

2. Dimostrare che per $x \neq 0$ le tangenti ai grafici delle funzioni
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{3x}$$
sono tra loro perpendicolari.

3. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$? Spiegare.

4. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{|x|}$$
   (a) Determinare la derivata prima di f
   (b) Precisare il dominio di derivabilità di f, cioè l'insieme degli x reali per i quali esiste f'.
   (c) Disegnando opportuni grafici, stabilire il numero di soluzioni (in $\mathbb{R}$) dell'equazione $e^{|x|} + x^2 - 2 = 0$.

5. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R}$,
$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{se } t \leq 0 \\ at + b & \text{se } t > 0 \end{cases}$$
Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione risulta derivabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.

[2]File tex: test03_derivate_2023.tex

IIS CREMONA

Liceo Scientifico "L. Cremona" (Milano).

Classe: 5E. Docente: Mauro Saita. Data: ____________

FUNZIONI (SEGNO, ASINTOTI E DERIVABILITÀ)

TEST DI AUTOVALUTAZIONE 3

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul proprio quaderno.[3]

1. Dire se le seguenti funzioni sono derivabili nel generico punto di ascissa x e, in caso affermativo, trovare la derivata prima

   (a) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3}$ $\left[f'(x) = -\frac{2x^2+3}{x^4}\right]$

   (b) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\left[f'(x) = -\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}\right]$

   (c) $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \ln x$ $[f'(x) = x(2\ln x + 1)]$

   (d) $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x + \frac{1}{\cos x}$ $\left[f'(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}\right]$

2. Sia
$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2x}$$
   . Determinare

   (a) il dominio massimale in $\mathbb{R}$ di f; $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$

   (b) eventuali asintoti;

   $[x = 0;\ x = -2 \text{ per } x \longrightarrow \pm\infty :\ y = x - 2]$

   (c) il segno di f;

   $[f(x) > 0 \text{ in } (-2, -1) \cup (0, +\infty)]$

   (d) la derivata prima f' di f.

   $\left[f'(x) = \frac{x^4+4x^3-2x-2}{(x^2+2x)^2}\right]$

3. Si consideri la funzione
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = |e^x - 1|$$
   Determinare

[3] File tex: test03_derivate_2023.tex

(a) gli intervalli di derivabilità di f e per tali intervalli trovare un'espressione analitica di f';

$$\left[f'(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ -e^x & x < 0 \end{cases} \right]$$

(b) classificare i punti di non derivabilità ; [punto angoloso in $x = 0$]

(c) studiare il segno di f'. [$f'(x) > 0$ per $x > 0$]

4. La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) è continua in $x = 0$ e $x = 1$?

[f è continua in $x = 0$, è continua in $x = 1$]

(b) è derivabile in $x = 0$ e $x = 1$?

[f è derivabile in $x = 0$, ha un punto angoloso in $x = 1$]

IIS CREMONA

Liceo Scientifico “L. Cremona” (Milano).

Classe: 5E. Docente: Mauro Saita. Data: ____________

FUNZIONI (ZERI, ASINTOTI E DERIVABILITÀ)

TEST DI AUTOVALUTAZIONE 4

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.[4]

1. Sia
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$$
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$
Risposta. $f'(x) = 5(3x^2 - 2x + 1)(6x - 2)^5$, $f'(1) = 5(3x^2 - 2x + 1)(6x - 2)^5$; equazione retta tangente: $y - 32 = 40(x - 1)$.

2. Determinare le equazioni degli asintoti della funzione
$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

3. Sia
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x - a & \text{se } x \geq 0 \\ bx + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione risulta derivabile su tutto il suo dominio.
Risposta. $a = -1$ e $b = 1$.

4. Sia
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$$
   (a) Calcolare la derivata prima di f.
   (b) Determinare gli intervalli di derivabilità di f (dominio di f') e classificare gli eventuali punti di non derivabilità .

   Risposta. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$; $D(f') = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; $x = -2$ punto a tangente verticale.

5. Sia
$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 3}$$
Determinare

[4] File tex: test03_derivate_2023.tex

(a) i limiti alla frontiera del dominio di f (D indica il dominio massimale di f in $\mathbb{R}$).

(b) gli zeri di f.

Risposta.

Limiti alla frontiera del dominio: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, , $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Zeri di f: $x = 2$.