IIS CREMONA

Liceo Scientifico Statale "Luigi Cremona" (Milano).

Classe: _____ Docente: Mauro Saita. Data: ____________

TEST SULLE DERIVATE

Cognome:	**Nome:**

Scrivere le risposte e le relative argomentazioni nei box riportati dopo ogni quesito.[1]

1. Senza utilizzare le regole di derivazione, trovare la derivata prima $\dfrac{df}{dx}$ della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

2. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$.

   (a) Scrivere la regola della derivata del prodotto fg.

   (b) Dimostrare la regola del punto (a).

[1] File tex: verifica_01_derivate_integrali_2025.tex

3. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

4. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $\frac{dy}{dx}$ delle funzioni seguenti.

   (a) $f(x) = e^{x^3+2x}$

   (b) $g(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$

   (c) $h(x) = \dfrac{4+x^2}{4-x^2}$

(a)

(b)

(c)

5. Dimostrare che $\dfrac{d}{dx}[\cos f(x)] = -\dfrac{df}{dx}\sin f(x)$

6. Si considerino le seguenti due funzioni

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{3x}$$

Dimostrare che in ogni $x \neq 0$ la tangente t_f al grafico di f e la tangente t_g al grafico di g sono perpendicolari.

7. Siano

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2 + 2)$$

(a) Verificare che le derivate prime di f e g sono uguali.

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} =$$

(b) Qual è il legame esistente tra f e g?

8. La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto armonico è

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

dove A, ω, Φ sono grandezze costanti (A indica l'*ampiezza*, ω la *pulsazione* e Φ la *fase*).

(a) Scrivere la velocità del punto materiale all'istante t.

$v(t) =$

(b) Scrivere l'accelerazione del punto materiale all'istante t.

$a(t) =$

9. La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(x) = x - x^2$$

ha un punto di massimo nel vertice della parabola. Quanto vale la derivata prima in tale punto? In generale, cosa si può dedurre dal fatto che una certa funzione ha in un punto, diciamo x_0, derivata prima nulla? In altri termini, che cosa si può dedurre in relazione al grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(x)$ se risulta

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0?$$

SOLUZIONI

1. Senza utilizzare le regole di derivazione, trovare la derivata prima $\dfrac{df}{dx}$ della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

$$\begin{aligned}
f + df &= 2(x+dx)^3 + 3(x+dx)^2 \\
&= 2x^3 + 6x^2dx + \underbrace{6x^2(dx)^2}_{=0} + \underbrace{2(dx)^3}_{=0} + 3x^2 + 6xdx + \underbrace{3(dx)^2}_{=0} \\
df &= 6x^2dx + 6xdx \\
\frac{df}{dx} &= 6x^2 + 6x
\end{aligned}$$

2. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$.

   (a) Scrivere la regola della derivata del prodotto fg.

   $$\frac{d}{dx}[fg] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

   (b) Dimostrare la regola del punto (a).

   $fg + d[fg] = [f + df]\,[g + dg]$

   $fg + d[fg] = fg + fdg + gdf + \underbrace{(df)\,(dg)}_{=0}$

   $d[fg] = fdg + gdf$

   Dividendo per $dx \neq 0$ si ottiene la tesi.

3. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

   Equazione della retta tangente: $2x + y - 1 = 0$

4. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $\frac{dy}{dx}$ delle funzioni seguenti.

(a) $f(x) = e^{x^3+2x}$

(b) $g(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$

(c) $h(x) = \dfrac{4+x^2}{4-x^2}$

(a) $\dfrac{df}{dx} = (3x^2+2)e^{x^3+2x}$

(b) $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{3(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

(c) $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2}$

5. Dimostrare che $\dfrac{d}{dx}[\cos f(x)] = -\dfrac{df}{dx}\sin f(x)$

Posto $u = f(x)$, $\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx}$.
Allora, utilizzando la regola della catena si ottiene:
$\dfrac{d}{dx}[\cos f(x)] = \dfrac{d}{du}[\cos u]\,\dfrac{du}{dx} = -\sin u\,\dfrac{df}{dx} = -\sin f(x)\,\dfrac{df}{dx}$

6. Si considerino le seguenti due funzioni

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{3x}$$

Dimostrare che in ogni $x \neq 0$ la tangente t_f al grafico di f e la tangente t_g al grafico di g sono perpendicolari.

$\frac{df}{dx} = 3x^2$ e $\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{3x^2}$. La derivata prima di una funzione calcolata in x è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x; quindi, per verificare che le due rette tangenti sono perpendicolari basta verificare che il prodotto delle due derivate prime è uguale a -1.

7. Siano

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}+1\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2+2)$$

(a) Verificare che le derivate prime di f e g sono uguali.

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{2x}{x^2+2}$$

(b) Qual è il legame esistente tra f e g?

f e g differiscono per una costante: $f(x) = g(x) - \ln 2$

8. La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto armonico è

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

dove A, ω, Φ sono grandezze costanti (A indica l'*ampiezza*, ω la *pulsazione* e Φ la *fase*).

(a) Scrivere la velocità del punto materiale all'istante t.

$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$

(b) Scrivere l'accelerazione del punto materiale all'istante t.

$a(t) = \frac{d^2y}{(dt)^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \Phi)$

9. La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(x) = x - x^2$$

ha un punto di massimo nel vertice della parabola. Quanto vale la derivata prima in tale punto? In generale, cosa si può dedurre dal fatto che una certa funzione ha in un punto, diciamo x_0, derivata prima nulla? In altri termini, che cosa si può dedurre in relazione al grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(x)$ se risulta

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0?$$

La derivata prima di y, calcolata in $x = \frac{1}{2}$ è nulla: $\frac{dy}{(dx)} = 1 - 2x\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$

Se una funzione ha derivata nulla in x_0, allora la funzione ha in x_0 un punto di massimo o di minimo o di flesso.

IIS CREMONA

Liceo Scientifico Statale "Luigi Cremona" (Milano).

Classe: _____ **Docente: Mauro Saita.** **Data:** ____________

TEST SULLE DERIVATE

Cognome:	**Nome:**

Scrivere le risposte e le relative argomentazioni nei box riportati dopo ogni quesito.[2]

1. Senza utilizzare le regole di derivazione, trovare la derivata prima $\dfrac{df}{dx}$ della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = 3x^3 - 2x^2$$

2. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$.

   (a) Scrivere la regola della derivata del quoziente $\frac{f}{g}$.

   (b) Dimostrare la regola del punto (a).

[2] File tex: verifica_01_derivate_integrali_2025.tex

3. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

4. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $\frac{dy}{dx}$ delle funzioni seguenti.

   (a) $f(x) = e^{x^2-x}$

   (b) $g(x) = 2x\sqrt{x^2+2}$

   (c) $h(x) = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$

(a)

(b)

(c)

5. Dimostrare che $\dfrac{d}{dx}[\sin f(x)] = \dfrac{df}{dx}\cos f(x)$

6. Si considerino le seguenti due funzioni

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{3x}$$

Dimostrare che in ogni $x \neq 0$ la tangente t_f al grafico di f e la tangente t_g al grafico di g sono perpendicolari.

7. Siano

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2 + 2)$$

(a) Verificare che le derivate prime di f e g sono uguali.

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} =$$

(b) Qual è il legame esistente tra f e g?

8. La legge oraria di un punto materiale che si muove di moto armonico è

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

dove A, ω, Φ sono grandezze costanti (A indica l'*ampiezza*, ω la *pulsazione* e Φ la *fase*).

(a) Scrivere la velocità del punto materiale all'istante t.

$v(t) =$

(b) Scrivere l'accelerazione del punto materiale all'istante t.

$a(t) =$

9. La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y(x) = 2x - x^2$$

ha un punto di massimo nel vertice della parabola. Quanto vale la derivata prima in tale punto? In generale, cosa si può dedurre dal fatto che una certa funzione ha in un punto, diciamo x_0, derivata prima nulla? In altri termini, che cosa si può dedurre in relazione al grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(x)$ se risulta

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0?$$

IIS CREMONA

Liceo Scientifico Statale "Luigi Cremona" (Milano).

Classe: _____ Docente: Mauro Saita. Data: ____________

TEST SULLE DERIVATE

Cognome:	**Nome:**

Scrivere le risposte e le relative argomentazioni nei box riportati dopo ogni quesito.[3]

1. Utilizzando la tecnica degli incrementi (senza utilizzare le regole di derivazione), trovare le derivate prime $\dfrac{df}{dx}$ delle seguenti funzioni, in x.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$$

2. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$. Utilizzando opportune regole di derivazione calcolare la derivata prima di

[3]File tex: verifica_01_derivate_integrali_2025.tex

$$y = \frac{f(x) - 1}{1 + f(x)}$$

3. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = e^{1-x^2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

4. Dimostrare che $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^\alpha = \alpha[f(x)]^{\alpha-1}\dfrac{df}{dx}$

5. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $\frac{dy}{dx}$ delle funzioni seguenti.

   (a) $f(x) = \ln(1 - 2x)$

   (b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

   (c) $h(x) = \sin x^2$

(a)

(b)

(c)

6. Scrivere la seconda legge della dinamica utilizzando la quantità di moto $P = mv$

Giustificare l'uguaglianza scritta sopra.

$F = ma = \dots$

7. La legge oraria di un corpo in caduta libera è

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove s indica la posizione del corpo, t il tempo e g l'accelerazione di gravità (le costanti s_0 e v_0 indicano rispettivamente la posizione e la velocità al tempo $t = 0$).

(a) Scrivere la velocità del punto materiale all'istante t.

$v(t) =$

(b) Scrivere l'accelerazione del punto materiale all'istante t.

$a(t) =$

8. **Vero o Falso?** Sia $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(x)$ una funzione derivabile sull'intervallo I di $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se per ogni $x \in I$, $\frac{dy}{dx} = 0$ allora y è costante su tutto l'intervallo I.

9. **Vero o Falso?** Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{y} \mathbb{R}, \quad y = y(x)$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se y è una funzione pari allora la sua derivata prima $\frac{df}{dx}$ è dispari.

(Suggerimento: f è pari vale l'uguaglianza ... e derivando entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene...)