

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

*Tempo della prova: 60 minuti.*¹

Quesito 1. Della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ si hanno le seguenti informazioni

- (a) f è dispari;
- (b) f è continua in $x = 0$;
- (c) $f(0) = 0$, $f(-2) = -3$ e $f(+2) = +3$;
- (d) Il grafico di $f'(x)$ (funzione derivata di f) è quello riportato nella figura qui sotto.

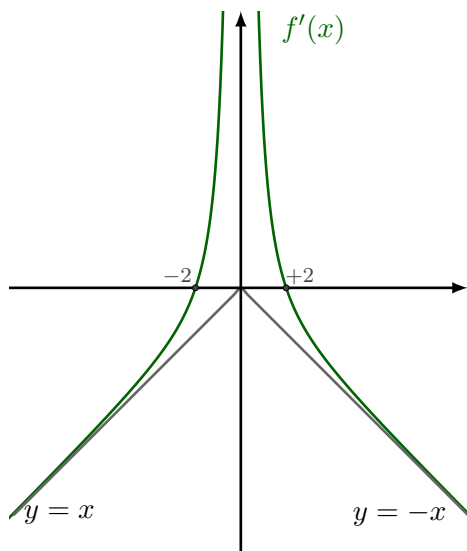


Figura 1: La funzione f' ha asintoto verticale di equazione $x = 0$. Per $x \rightarrow -\infty$, f' ha asintoto obliquo di equazione $y = x$ mentre, per $x \rightarrow +\infty$, f' ha asintoto obliquo di equazione $y = -x$.

1. Tracciare un grafico qualitativo di $y = f(x)$.
2. Tracciare un grafico qualitativo della derivata seconda $f''(x)$.

Quesito 2. Sia

$$[-1, 0] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$

1. Verificare, argomentando, che la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

¹File tex: verifica_04.calcolo.diff.5e.2018.tex

2. Verificare che f ha esattamente un ‘punto di Lagrange’ e trovare le sue coordinate.
3. Indicato con x_0 il punto di Lagrange trovato nel punto precedente, scrivere l’equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Quesito 3. I grafici riportati nella figura qui sotto sono quelli di una funzione, della sua derivata prima e della sua derivata seconda. Qual è il grafico della funzione? Quale quello della derivata prima? Quale quello della derivata seconda?

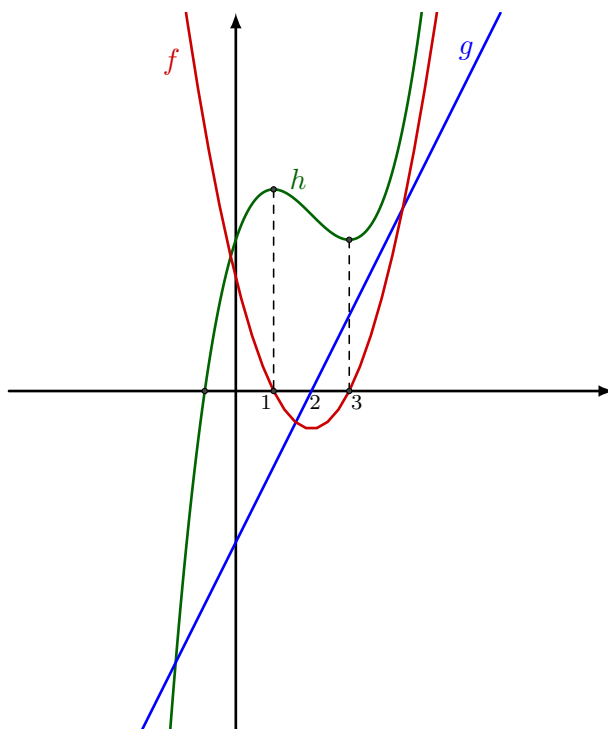


Figura 2

Quesito 4. Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n \geq 2$ a coefficienti reali. Dimostrare che se $x_1 < x_2$ sono due radici distinte di $p(x)$ allora esiste almeno un numero c , $x_1 < c < x_2$ che è radice di $p'(x)$. ($p'(x)$ indica la derivata prima di $p(x)$).

Quesito 5. L’equazione

$$2e^x + \sqrt{x} - 4 = 0$$

ha soluzioni nell’intervallo $[0, 3]$? Motivare la risposta.

Soluzioni.

Quesito 1. Dominio di f' : $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$x = 0$ è un punto di non derivabilità per f ; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$. Segue che $x = 0$ è *punto di flesso a tangente verticale*.

Segno di $f'(x)$. $f'(x) > 0$ in $(-2, 0) \cup (0, +2)$; $f'(x) = 0$ in $x = -2$ e $x = +2$; $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -2) \cup (+2, +\infty)$. Quindi f ha minimo locale in $x = -2$ e massimo locale in $x = +2$.

Infine, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = -\infty$.

Dalle deduzioni riportate sopra e dalle ipotesi sulla funzione (f dispari, $f(0) = 0$, $f(-2) = -3$ e $f(+2) = +3$) segue che un grafico probabile di f è il seguente

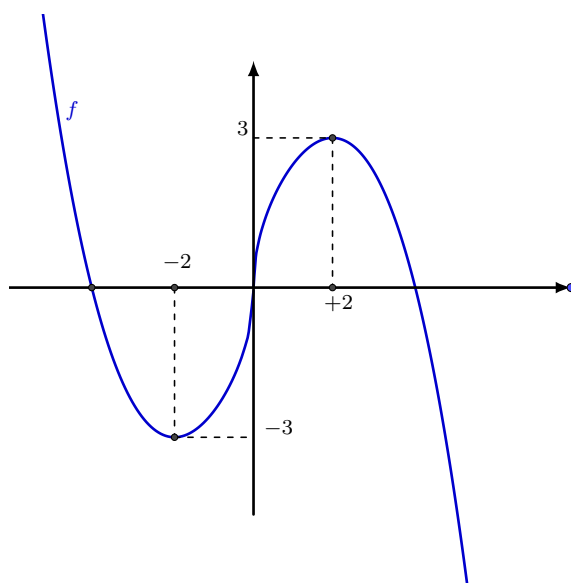


Figura 3: Grafico probabile di f .

Quesito 2.

1. La funzione $[-1, 0] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, infatti f è continua in $[-1, 0]$ perchè quoziente di funzioni continue e f è derivabile in $(-1, 0)$ perchè quoziente di funzioni derivabili.
2. Per il teorema di Lagrange esiste c in $(-1, 0)$ per il quale risulta

$$f(0) - f(-1) = f'(c)(0 - (-1))$$

Per trovare i punti c di Lagrange bisogna trovare le soluzioni in $(-1, 0)$ dell'equazione

$$f(0) - f(-1) = f'(x)(0 - (-1))$$

Con facili calcolcoli si ottiene: $3 = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$, ossia

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{0.1}$$

L'unica soluzione dell'equazione (0.1) che appartiene all'intervallo $(-1, 0)$ è $x = 1 - \sqrt{2}$ (l'altra soluzione, $x = 1 + \sqrt{2}$, non è accettabile perchè maggiore di 1).

3. Innanzi tutto $f(1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ e $f'(1 - \sqrt{2})$. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ è

$$y - (1 + \sqrt{2}) = 3(x - (1 - \sqrt{2})) \quad (0.2)$$

Con pochi calcoli si ottiene: $y = 3x + 4\sqrt{2} - 2$.

Quesito 3. Funzione, derivata prima, derivata seconda sono, nell'ordine, h , f , g .

Quesito 4. Per ipotesi $p(x)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado maggiore o uguale a due, ossia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$.

Poichè $x_1 < x_2$ sono due radici di $p(x)$ si ha: $p(x_1) = 0$ e $p(x_2) = 0$. Inoltre $p(x)$ è continuo in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2) perchè somma di funzioni continue (derivabili). Allora, per il teorema di Rolle esiste $c \in (x_1, x_2)$ per il quale risulta $p'(c) = 0$.

Quesito 5. La funzione $[0, 3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + \sqrt{x} - 4$. f è continua in $[0, 3]$ e $f(0) \cdot f(3) < 0$. Allora, per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto c in $(0, 3)$ per il quale risulta

$$2e^c + \sqrt{c} - 4 = 0$$

Dunque l'equazione data ha almeno una soluzione nell'intervallo $(0, 3)$.