Liceo Scientifico "L. Cremona". Classe 5E. Febbraio 2016.
Verifica di Matematica. Docente: Mauro Saita
Calcolo differenziale e integrale

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.
Tempo della prova: 70 minuti. Punteggio di ogni esercizio: $1,5$.[1]

1. Sia $(-1/2, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = 0$?

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}$$

3. La funzione

$$[-4, 2] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

soddisfa, nel suo dominio, le ipotesi del teorema di Lagrange? In caso affermativo trovare i 'punti di Lagrange'.

4. Alle estremità di foglio di cartone quadrato di lato l si ritagliano quattro piccoli quadrati e poi si piega il foglio in modo da formare una scatola aperta con la forma di parallelepipedo rettangolo. Trovare la misura del lato dei quadratini affinchè la scatola abbia volume massimo.

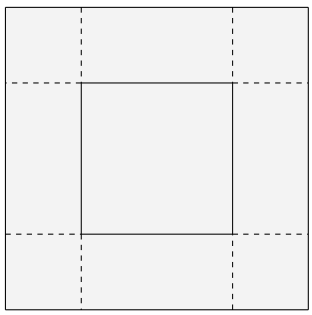

Figura 1: Costruzione di una scatola di volume massimo

[1] File tex: verifica_04_calcolo_diff_e_int_5e_2016.tex

5. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{x-2}\,dx$$

6. Stabilire se la funzione integrale

$$[1,10] \xrightarrow{F} \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_{1}^{x} \frac{e^{2t}+2}{t^2+1}\,dt$$

è derivabile in [1,10]. In caso affermativo trovare $F'(x)$, per ogni $x \in [1,10]$

Risposte.

1. f è derivabile in $x = 0$ per $a = -2$ e $b = 2$.

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x \cos x}{x^2 \tan x} = \dfrac{1}{3}$

3. Unico punto di Lagrange: $x = -2$.

4. Indicato con x il lato del quadratino, la scatola di volume massimo si ottiene per $x = \frac{l}{6}$.

5. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{x-2}\, dx = 3 - 6 \ln 2$

6. Per il teorema fondamentale del calcolo (f è continua) la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{2t}+2}{t^2+1}\, dt$ è derivabile e $F'(x) = \dfrac{e^{2x}+2}{x^2+1}$, per ogni $x \in [1, 10]$.