Approfondimento

La "Bella Elena": storia di una curva.

Indice degli argomenti

Cicloide. Definizione.

Definizione

La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza quando questa rotola, senza strisciare, su di una retta.

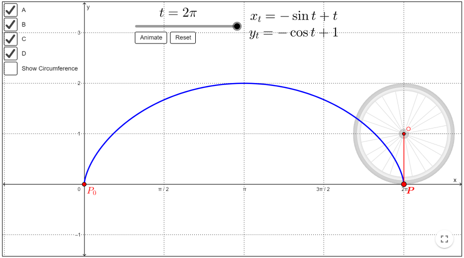


Figure: Pascal, a proposito di questo curva, scrive: "La roulette [cicloide] è una curva talmente comune, che dopo la retta e la circonferenza essa è quella più frequente, spesso sotto gli occhi di tutti, tanto che c'è da stupirsi che non sia stata studiata dagli antichi, che non hanno tralasciato nulla al riguardo.".

Problema n. 1

Problema

Assegnato un cerchio generatore di raggio r e una retta, trovare le equazioni parametriche della cicloide.

Si tratta di trovare un modo per descrivere la curva

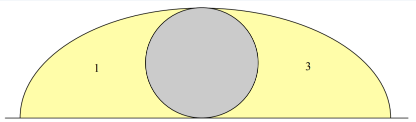
$$\begin{cases} x & = & ?????? \\ \\ y & = & ?????? \end{cases}$$

Se si segue la strada 'algebrica', questo è il primo passo per poter studiare le proprietà di questa curva.

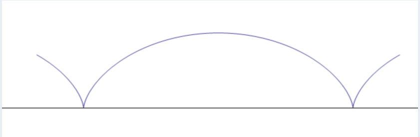
Problema n. 2 e 3

Data una cicloide, il cui cerchio generatore ha raggio r, trovare

- l'area delimitata da un intero arco di cicloide.



- la lunghezza dell'arco di cicloide.



Come trovare l'area delimitata da una curva di cui si conoscono le sue equazioni parametriche?

Risposta. Sia γ una curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

L'area A delimitata dall'arco γ, dalle rette verticali $x = a$, $x = b$ e dall'asse x è

$$A = \int_a^b y(t)\, x'(t)\, dt$$

Come trovare la lunghezza di un arco di curva di cui si conoscono le sue equazioni parametriche?

Risposta. Sia γ una curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

La lunghezza L dell'arco γ, corrispondente all'intervallo $a \leq t \leq b$ è

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

La cicloide in architettura.

Figure: Ponte acquedotto intitolato alla Madonna della Stella, Gravina di Puglia (1743).

La cicloide in architettura.

Figure: I ponti di Calatrava, Reggio Emilia. Architetto Santiago Calatrava (2007).

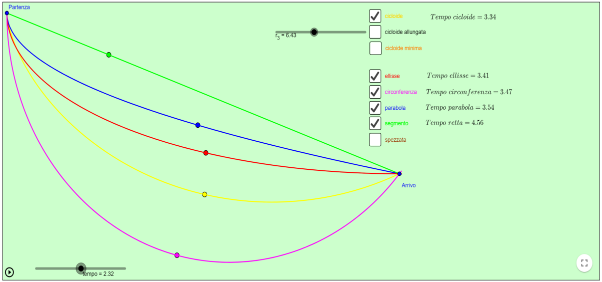
La cicloide in architettura.

Figure: Chiesa santuario, San Giovanni Rotondo (Foggia). Architetto: Renzo Piano (2004).

Il problema della brachistocrona.

Johann Bernoulli, Acta Eruditorum, 1696.

Una particella è vincolata a muoversi, sotto l'azione della sola forza di gravità, da un punto A a un punto B (più basso). Trovare il percorso per il quale la particella si muova da A a B nel minor tempo possibile, nell'ipotesi che la velocità iniziale in A sia nulla.



La soluzione di J. Bernoulli

Utilizza un'analogia con il comportamento della luce. Secondo il principio di Fermat

Tra tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.

Quindi, se il mezzo attraversato dalla luce è omogeneo il cammino più veloce è la linea retta. Ma se fra A e B sono interposti più mezzi con diverso indice di rifrazione il cammino sarà generalmente diverso dalla linea retta. La luce possiede una velocità diversa a seconda del mezzo che attraversa, come precisa la legge di Snell

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

La soluzione di J. Bernoulli

Johann Bernoulli arriva alla conclusione che la soluzione $y = y(x)$ deve soddisfare la seguente equazione:

$$y + y(y')^2 = c$$

dove y' è la derivata prima di y rispetto a x e c è una costante.

Con qualche calcolo (questa è un aspetto della sfida!) si arriva a concludere che la curva cercata è una cicloide!

Il problema della brachistocrona.

La cicloide nello sci.

In campo sciistico sono stati fatti esperimenti per dimostrare che gli sciatori nelle gare di slalom gigante o speciale percorrono o cercano di percorrere archi di cicloide.

Vince chi è in grado di descrivere traiettorie cicloidali.

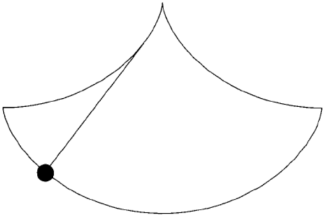
Il problema della tautocrona.

Il matematico (fisico e astronomo) Christian Huygens si occupò della costruire orologi precisi. A tale scopo si pose il seguente

Problema

Determinare una curva lungo la quale il periodo di oscillazione fosse rigorosamente indipendente dalla posizione in cui la particella oscillante iniziasse il suo moto.

Huygens stesso scoprì che la cicloide gode di questa proprietà!



Indicazioni per eventuali approfondimenti

- Un lavoro molto ben fatto è quello proposto dall'Università di Matematica di Trento (Dicomat. Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica), nell'ambito del progetto Lauree scientifiche:
  `https://edulab.unitn.it/dicomat/geometria-ss-ii-g/la-cicloide/`
- Dall'Università di Roma 2 segnalo:
  `http://crf.uniroma2.it/labfis/laboratori%202010_2011/Laboratorio%20Tempo/LAB_3_classi/La%20cicloide.pdf`
- Per quanto riguarda il calcolo della lunghezza di un arco di cicloide e della sua area sono davvero tanti i siti che propongono la soluzione.
  `https://www.maurosaita.it` (Home page $-->$ Esercizi su integrali e integrali generalizzati).

Indicazioni per eventuali approfondimenti

- Per quanto riguarda *brachistocrona e sci* consiglio di consultare i numerosi lavori disponibili in rete sull'argomento. Per esempio quello di un gruppo di studenti del Liceo Scientifico Volta di Milano in collaborazione con FDS (Politecnico di Milano).
- Molto interessante l'approccio seguito da Emma Castelnuovo, rivolto a studenti della scuola media inferiore (pag. 23 – pag.30.)
  `https://web.math.unifi.it/users/ottavian/tesi/tesi_contaldo.pdf`
- Per chi fosse interessato alla realizzazione di nuove curve 'derivate' dalla cicloide può consultare il file (di Luciano Battaia), pag. 35 e seguenti.
  `http://www.batmath.it/corsi_uni/design_1617/MatDesignCurveSup.pdf`

Indicazioni per eventuali approfondimenti

- Per domande, curiosità o altro scrivete al seguente indirizzo: saita.mauro@iiscremona.it