BREVE INTRODUZIONE AL CALCOLO INFINITESIMALE

Una proposta didattica per una classe quinta di liceo scientifico

Contenuti, destinatari e obiettivi di questa proposta

Contenuti: concetti di derivata, di integrale (di Riemann) e teorema fondamentale del calcolo integrale.

Destinatari: Studenti di una classe quinta di liceo scientifico.

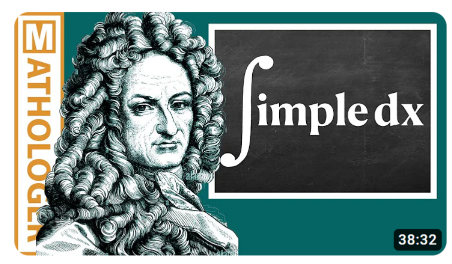
Tempi: Inizio anno scolastico, per un totale di 20 ore.

Obiettivi:
- Rendere possibile fin da subito l'utilizzo in fisica della notazione differenziale e integrale.
- Anticipare il più possibile gli argomenti su cui si basa la seconda prova scritta dell'esame di stato.
- Provare a risolvere un'evidente criticità dell'insegnamento della matematica nella scuola superiore italiana.

Per iniziare . . .

Visione di un video dalla piattaforma Mathologer:

Why Calculus is so easy?



https://www.youtube.com/watch?v=ku0xDh3egN0

Problema n. 1 del calcolo infinitesimale

Trovare la velocità quando si conosce la posizione.

Sia

$$[a, b] \xrightarrow{s} \mathbb{R} \quad s = s(t)$$

la legge oraria di un moto in una dimensione (la variabile indipendente t indica il tempo, $s(t)$ la posizione dell'oggetto al tempo t).

Trovare la velocità dell'oggetto al tempo t.

Moto rettilineo con velocità variabile.

Lo studente conosce la risposta perché gli è stata fornita nel corso del secondo anno, (corso di fisica, liceo scientifico).

Il procedimento che si segue è all'incirca questo:

1. si introduce il concetto di velocità media come rapporto tra lo spazio percorso dal punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato per percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Moto rettilineo con velocità variabile. (continuazione).

2. Poi si introduce il concetto di velocità istantanea al tempo t_0 servendosi della velocità media su un intervallo finito $\Delta t = t - t_0$ nell'ipotesi che Δt diventi sempre più piccolo.

$$v(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{per } \Delta t \text{ che tende a zero}$$

È evidente che la definizione di velocità istantanea nasconde un passaggio al limite:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Si sà ...ai matematici piace generalizzare!

Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale, dove I è un intervallo della retta reale e $t_0 \in I$. Si chiama *derivata prima di f nel punto t_0* il limite (se esiste finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Per indicare la derivata di una funzione si usano due differenti notazioni, ossia

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \begin{cases} f'(t_0) & \text{(Newton)} \\ \\ \dfrac{df}{dt}(t_0) & \text{(Leibniz)} \end{cases}$$

Due esempi ...

1. La derivata prima della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$ è

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Due esempi . . . (continuazione)

2 La derivata prima della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ nel punto $x_0 = x$ è :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

. . . e un esercizio

Applicazioni del concetto di derivata in fisica

1. Scrivere la definizione di intensità istantanea di corrente.
2. Scrivere la definizione di potenza istantanea.
3. Scrivere la definizione di variazione di flusso magnetico (ammesso che sia un argomento già trattato in fisica).

Derivate di funzioni elementari

Un elenco

.

1. $D\, x^n = nx^{n-1}$ (volendo si può dimostrare)
2. $D \ln x = \dfrac{1}{x}$
3. $D\, e^x = e^x$
4. $D\, \sin x = \cos x$
5. $D\, \cos x = -\sin x$

Scegliete voi quali derivate di funzioni elementari inserire nell'elenco, la scelta dipende da quali esercizi avete in mente di fare.

Significato geometrico di derivata prima

Derivata prima e retta tangente

Dire che la funzione

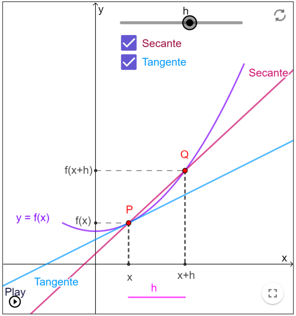
$$I \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \;\; y = f(x)$$

è derivabile (differenziabile) nel punto x_0 equivale ad affermare che *il grafico di f possiede retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$; tale retta è unica e non può essere verticale. Inoltre il suo coefficiente angolare è*

$$m = f'(x_0)$$

Interpretazione geometrica di derivata prima. Dimostrazione euristica.

Definición de La Derivada



https://www.geogebra.org/m/crhcyd2z

Retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto.

Si possono proporre esercizi di questo tipo

Esercizio

Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$.

Basta far riflettere lo studente sul fatto che l'equazione richiesta è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Regole sulle derivate

1. **Derivata della somma.**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. **Derivata del prodotto (regola di Leibniz).**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. **Derivata del quoziente.**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

Regole sulle derivate

4. **Derivata della funzione composta.**

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Regole sulle derivate.

Funzioni	Derivate
$h(x) = (f(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$h'(x) = \alpha\,(f(x))^{\alpha-1}\, f'(x)$
$h(x) = \ln\lvert f(x)\rvert$	$h'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$h(x) = e^{f(x)}$	$h'(x) = f'(x)e^{f(x)}$
$h(x) = \sin f(x)$	$h'(x) = f'(x)\cos f(x)$
$h(x) = \cos f(x)$	$h'(x) = -f'(x)\sin f(x)$

Problema n. 2 del calcolo infinitesimale.

Trovare lo spazio percorso, quando si conosce la velocità.

Sia

$$[a, b] \xrightarrow{v} \mathbb{R} \quad v = v(t)$$

la funzione che fornisce, per ogni istante di tempo t, la velocità di un punto materiale.

Trovare lo spazio percorso dal punto materiale al tempo t.

Problema n. 2 del calcolo infinitesimale.

Il caso del moto uniforme

Si consideri un punto che, nell'intervallo di tempo tra l'istante iniziale $t = a$ e l'istante finale $t = b$, si muove lungo una retta con velocità costante.

In questo particolarissimo caso, la distanza percorsa dal punto, dall'istante a all'istante b, è il prodotto della velocità v (costante) per l'intervallo di tempo $b - a$

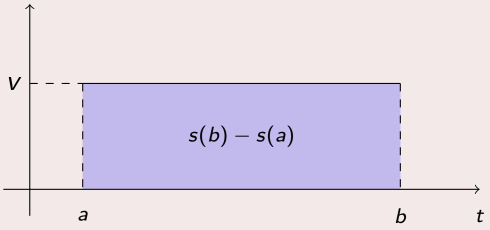
$$s(b) - s(a) = v \cdot (b - a) \tag{1}$$

Ovvio ma significativo!

Problema n. 2 del calcolo infinitesimale.

Interpretazione geometrica della risposta.

Se si traccia il grafico della velocità $v = v(t)$ in funzione del tempo, la distanza percorsa dal punto materiale è rappresentata dall'area del rettangolo ombreggiato.



Problema n. 2 del calcolo infinitesimale.

Il caso del moto a velocità variabile.

Si consideri ora un punto materiale che si muove di moto rettilineo con velocità

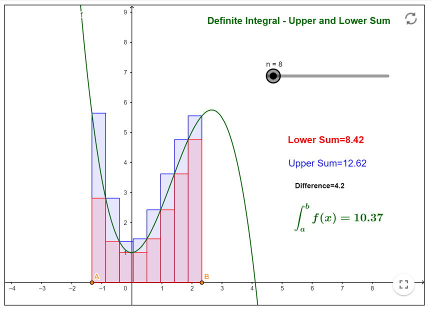
$$[a, b] \xrightarrow{v} \mathbb{R} \quad v = v(t)$$

variabile nel tempo.

L'idea è quella di approssimare $v(t)$ mediante una opportuna "funzione a scala", più precisamente si tratta di suddividere l'intervallo di tempo $b - a$ in tanti intervallini talmente piccoli da poter supporre che su ognuno di essi la funzione velocità sia costante.

Dalla piattaforma "geogebra.org".

Una figura dinamica



https://www.geogebra.org/m/b9stfww2

Valore approssimato dello spazio percorso.

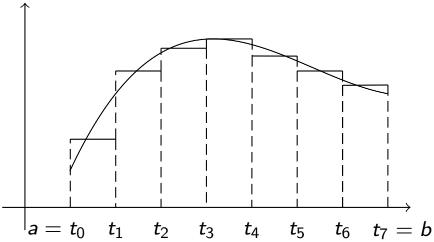
Se pare ragionevole questo modo di approssimare la funzione velocità allora lo spazio $s(b) - s(a)$, percorso dal punto materiale, è dato da

$$s(b) - s(a) \approx \sum_{i=1}^{n} v(t)\,\Delta t \tag{2}$$

(In questo contesto:
- gli intevallini hanno tutti la stessa ampiezza Δt;
- $v(t)$ indica un valore qualsiasi, assunto dalla funzione v su ogni singolo intervallino).

Integrale di Riemann.

Ripetiamo:



La funzione velocità, su ogni intervallino di tempo, è approssimata da un valore costante: più piccoli sono gli intervallini migliore è l'approssimazione. Lo spazio percorso dal punto materiale è circa

$$s(b) - s(a) \approx \sum_{i=1}^{n} v(t)\, \Delta t$$

Anche nel caso di velocità variabile, la distanza percorsa dal punto è rappresentata dall'area delimitata dal grafico della funzione velocità e dall'asse del tempo.

Integrale di Riemann

Per determinare in termini esatti tale area si è allora condotti a prendere in considerazione il limite delle somme del tipo $\sum_{i=1}^{n} v(t)\,\Delta t$ quando Δt tende a zero. Si pone, per definizione,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t)\,\Delta t = \int_a^b v(t)\,dt \tag{3}$$

e da questa definizione si ottiene l'uguaglianza esatta

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a) \tag{4}$$

la quale fornisce lo spazio percorso nell'intervallo di tempo fra l'istante a e l'istante b.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (1).

Osservazione importante

L'uguaglianza (4), oltre a fornire la soluzione del nostro problema, esprime anche la relazione esistente tra derivata e integrale. Tale uguaglianza precisa in che senso gli operatori di derivazione e di integrazione sono uno l'inverso dell'altro.
Ricordando che $v(t) = s'(t)$, da (4) si ottiene:

$$\int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) \tag{5}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale (2).

Osservazione importante (continuazione)

L'ultima uguaglianza costituisce il cosiddetto teorema fondamentale del calcolo integrale. Essa dice che per calcolare l'integrale $\displaystyle\int_a^b s'(t)\,dt$ bisogna prima trovare una funzione $s = s(t)$ la cui derivata sia uguale alla funzione integranda (si dice che s è una *antiderivata* o *primitiva* della funzione integranda) e poi calcolare la variazione $s(b) - s(a)$.

Definizione di integrale di Riemann, 1854

Definizione (L'integrale come somma infinita di parti infinitesimali)

L'integrale di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è (se esiste) il "limite":*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x$$

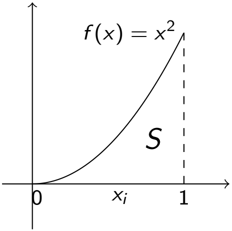
Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che per determinare l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ bisogna:

- trovare una antiderivata di $f(x)$, ossia una funzione $F(x)$ per la quale $F'(x) = f(x)$;
- calcolare la variazione $F(b) - F(a)$ della funzione sull'intervallo (a, b).

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Utilizzo dell'integrale per il calcolo di un'area.

Trovare l'area S della figura compresa tra il grafico della parabola $f(x) = x^2$ e l'asse delle x, quando x varia nell'intervallo $[0, 1]$.



Soluzione. Una antiderivata di $f(x)$ è $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$.

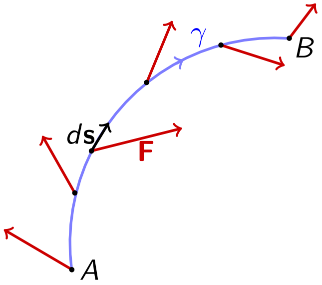
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$$

Un consiglio.

Occorre dire subito, per non creare fraintendimenti, che l'integrale definito è uno strumento che NON serve solamente per calcolare aree; può calcolare volumi, lunghezze, il lavoro di un campo di forze lungo curve orientate e tanto altro ancora.

Esempio: lavoro compiuto da una forza variabile.

Si consideri il caso di un punto materiale che si sposta da un punto A a un punto B lungo un cammino orientato γ. Si supponga inoltre che il punto materiale si muova in una regione di spazio in cui è presente un campo di forze **F**, variabile in direzione e intensità .



Per determinare il lavoro compiuto da **F** lungo γ si può fare così:

Esempio: lavoro compiuto da una forza variabile.

1. Si approssima la curva orientata γ con tanti vettori infinitesimi $d\mathbf{s}$;
2. su ognuni $d\mathbf{s}$ la forza $\mathbf{F}$ si considera costante;
3. il lavoro elementare compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $d\mathbf{s}$ è

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

4. il lavoro totale è dato dalla somma di tutti i lavori elementari, ossia

$$L = \int_\gamma dL = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{6}$$

Proprietà dell'integrale

1. **Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda.** Per ogni f, g integrabili in $[a, b]$
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. **Omogeneità dell'integrale.** Per ogni f integrabile in $[a, b]$ e per ogni numero reale k
$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

3. **Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.** Per ogni f integrabile in $[a, b]$ e per ogni $c \in (a, b)$,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Proprietà dell'integrale

4. **Integrale orientato.** Se $a > b$, si pone, per definizione,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{7}$$

Con questa definizione, l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{8}$$

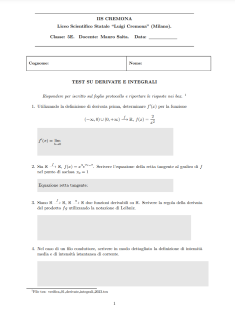
vale per ogni scelta di a, b, c (anche se c non è compreso tra a e b), a patto che gli integrali considerati esistano.

Una prima tavola di antiderivate.

Funzioni	Primitive
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x \ (a > 0 \ \wedge \ a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\, a^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$

Per finire . . .

Un esempio di verifica finale



IIS CREMONA

Liceo Scientifico Statale "Luigi Cremona" (Milano).

Classe: 5E. Docente: Mauro Saita. Data: ____________

Cognome:	**Nome:**

TEST SU DERIVATE E INTEGRALI

Rispondere per iscritto sul foglio protocollo e riportare le risposte nei box. [1]

1. Utilizzando la definizione di derivata prima, determinare $f'(x)$ per la funzione

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$f'(x) = \lim_{h \to 0}$

2. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^{2x-2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$

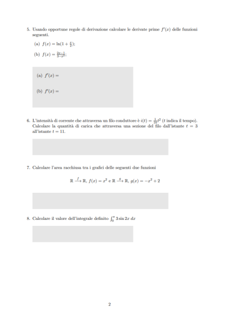
Equazione retta tangente:

3. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$. Scrivere la regola della derivata del prodotto fg utilizzando la notazione di Leibniz.

4. Nel caso di un filo conduttore, scrivere in modo dettagliato la definizione di intensità media e di intensità istantanea di corrente.

[1] File tex: verifica_01_derivate_integrali_2023.tex

1



5. Usando opportune regole di derivazione calcolare le derivate prime $f'(x)$ delle funzioni seguenti.

   (a) $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$;

   (b) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x^2}$;

(a) $f'(x) =$

(b) $f'(x) =$

6. L'intensità di corrente che attraversa un filo conduttore è $i(t) = \frac{1}{10}t^2$ (t indica il tempo). Calcolare la quantità di carica che attraversa una sezione del filo dall'istante $t = 3$ all'istante $t = 11$.

7. Calcolare l'area racchiusa tra i grafici delle seguenti due funzioni

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \text{ e } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 2$$

8. Calcolare il valore dell'integrale definito $\int_0^{\pi} 3 \sin 2x \, dx$

2