# VETTORI E RETTE

Una proposta didattica per la classe terza di liceo scientifico

# Prerequisiti

## Nozioni acquisite dallo studente negli anni precedenti

1. dal corso di matematica: nozioni di algebra, prodotti notevoli, algebra relativa al primo e secondo grado;
2. dal corso di fisica: vettori, prodotto scalare e prodotto vettore(?), operazioni con i vettori. Leggi orarie del moto uniforme e di quello uniformemente accelerato.

## Un consiglio

Richiamare le proprietà di campo (ordinato) dei numeri reali.

Si tratta di proprietà note allo studente perché è stato abituato ad usarle sia nel biennio che nei tre anni di scuola media.

# Il programma ministeriale

Il programma ministeriale per la classe terza dei licei scientifici prevede l'entrata in scena di René Descartes mediante il quale inizia quel processo di

algebrizzazione della geometria

che tanta fortuna avrà nei secoli a venire. Nel 1637 Descartes pubblica (in francese) *Discorso sul metodo*, prefazione dei tre saggi scientifici posti in appendice: "la diottrica", "le meteore", "la geometria". L'ultimo di questi saggi contiene le basi di quella che oggi chiamiamo geometria analitica.

# Sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) nel piano.

Premessa indispensabile, alla base di questo nuovo modo di guardare la realtà (una vera e propria rivoluzione nella storia del pensiero scientifico) consiste nel fissare nel piano (nello spazio, in $\mathbb{R}^n$) un sistema di riferimento: esso costituisce il formidabile ponte che consente il passaggio dal mondo dell'algebra a quello della geometria e viceversa.

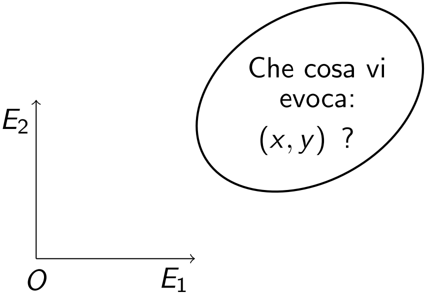
# Sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) nel piano.

La mia scelta tra le numerose possibili è la seguente

Fissare un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) nel piano significa scegliere

1. un punto origine $O$;
2. una coppia di vettori $E_1$, $E_2$, spiccati da $O$, ortogonali e di lunghezza unitaria.

# La prima domanda che rivolgo alla classe

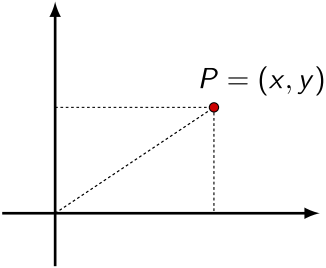


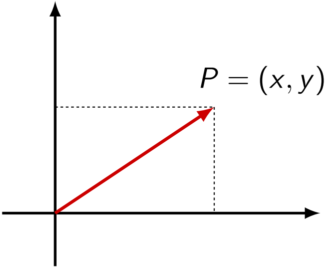

In genere lo studente risponde: un punto. Bene, il primo oggetto geometrico è stato algebrizzato.

Ciò che è importante dire con molta chiarezza è che la coppia ordinata di numeri reali $(x, y)$ ha due importanti interpretazioni geometriche:

- il punto
- il vettore spiccato dall'origine

L'interpretazione più corretta è suggerita dal contesto.



# Somma di due vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare

## Definizione

*Siano* $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $k$ *un numero reale.*

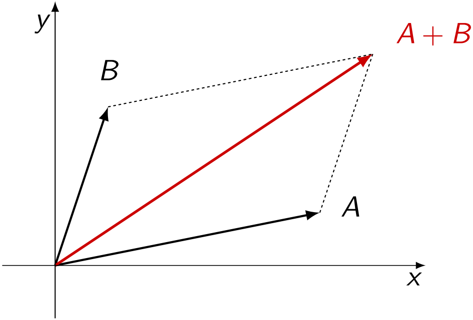
- *Si chiama* *somma* *di* $A$ *e* $B$ *il vettore*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

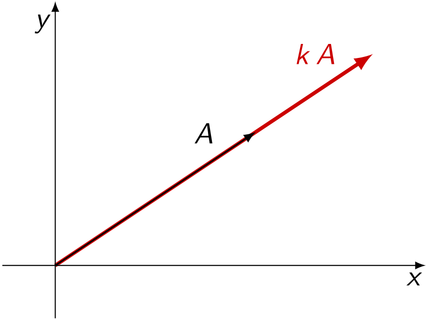
- *Si chiama* *moltiplicazione* *del vettore* $A$ *per il numero* $k$ *il vettore*

$$kA = (ka_1, ka_2)$$

Il vettore somma $A + B$ è quello che si ottiene con la "regola del parellelogramma".



Moltiplicare un vettore $A$ per uno scalare $k$ significa "dilatare"( "contrarre ") del fattore $k$, il vettore $A$.



# Lunghezza di un vettore. Distanza tra due punti

Si tratta di due semplici risultati, conseguenza immediata del Teorema di Pitagora.

1. La lunghezza di $A = (a_1, a_2)$ è il numero

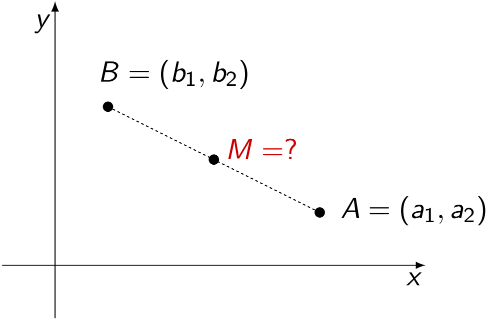
$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

2. La distanza di $A = (a_1, a_2)$ da $B = (b_1, b_2)$ è il numero

$$|B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

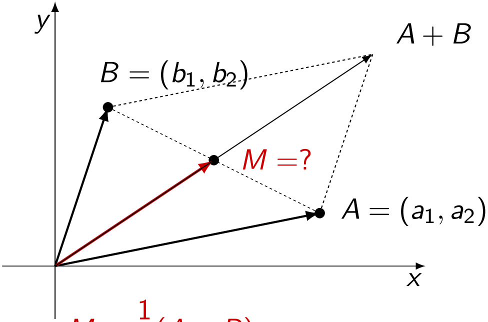
# Problema

Siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Trovare una formula per determinare il punto medio del segmento $\overline{AB}$.



# Problema

Siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Trovare una formula per determinare il punto medio del segmento $\overline{AB}$.




$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

# Prodotto scalare. Vettori ortogonali

Il prodotto scalare di $A$ e $B$ è il numero

$$A \cdot B = |A|\,|B| \cos\theta$$

dove $\cos\theta$ è l'angolo (convesso) formato da $A$ e $B$.

Due vettori $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ si dicono ortogonali se

$$A \cdot B = 0$$

# Proprietà del prodotto scalare

1. Il prodotto scalare è simmetrico
$$A \cdot B = B \cdot A$$
2. Il prodotto scalare è omogeneo
$$(kA) \cdot B = k(A \cdot B)$$
3. Il prodotto scalare è additivo
$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
4. Il prodotto scalare è positivo
$$A \cdot A = |A|^2 > 0 \quad \text{se } A \neq 0$$

## Il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali

**Teorema**

*Se* $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ *allora*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

A lezione propongo la dimostrazione come approfondimento; impararla è facoltativo. Lo studente che decide di studiarla deve avvisarmi in modo che io ne possa tener conto nelle interrogazioni.

Consiglio: gli argomenti difficili (quando possibile) devono essere facoltativi. Quando ci si sente obbligati a fare qualcosa si cerca di non farla, se si può scegliere, alcuni accettano la sfida!.

# Il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali.

**Teorema**

*Se* $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ *allora*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Dimostrazione.

Siano $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A \cdot B = & \ (a_1 E_1 + a_2 E_2) \cdot (b_1 E_1 + b_2 E_2) \\ = & \ a_1 b_1 \underbrace{(E_1 \cdot E_1)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(E_1 \cdot E_2)}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{(E_2 \cdot E_1)}_{=0} + a_2 b_2 \underbrace{(E_2 \cdot E_2)}_{=1} \\ = & \ a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad Q.E.D. \end{aligned}$$

$\square$

# Proiezione di un vettore lungo un altro

**Teorema**

*Siano* $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$ *(*$B \neq 0$*). Si chiama proiezione di A lungo (la retta di) B il vettore*

$$P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\, B$$

*In particolare se* $|U| = 1$

$$P_U(A) = (A \cdot U)\, B$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio (a voi . . . , agli studenti la dimostro!).

# Equazioni parametriche di rette

Equazione parametrica della retta $r$ contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e avente vettore di direzione $V = (v_1, v_2)$

$$P = P_0 + Vt$$

Posto $P = (x, y)$, l'equazione assume la forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

# Equazioni parametriche di rette

## Osservazioni

- $P = P_0 + Vt$ è un'equazione parametrica (vettoriale) di una iper-retta in $\mathbb{R}^n$ ma (ovviamente) qui non lo dico.
- $P = P_0 + Vt$ è la legge oraria di un punto materiale che si muove di moto uniforme, con velocità costante pari a $V = (v_x, v_y)$.
- Esistono molti modi di rappresentare una retta nel piano ma essi non sono equivalenti tra loro; nel senso che il loro contenuto di informazione non è lo stesso.

# Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

Supposto $v_1 \neq 0$ ($V$ è diverso da 0 perché vettore di direzione), dalle equazioni parametriche di $r$ si ottiene $t = \dfrac{x - x_0}{v_1}$ e

$$y = y_0 + v_2 \frac{(x - x_0)}{v_1}$$

$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$$

$$v_2 x - v_1 y - v_2 x_0 - v_1 y_0 = 0$$

Posto $a = v_2$, $b = -v_1$ e $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$ si ottiene:

$$ax + by + c = 0$$

detta equazione cartesiana di $r$.

# Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane

**Osservazione importante**

Vale la pena far notare un fatto che spesso non si dice: se

$$ax + by + c = 0$$

è l'equazione cartesiana di una certa retta nel piano, il vettore $(a, b)$ fornisce una direzione ortogonale della retta in questione.

Si tratta di un risultato che è molto utile in tanti esercizi.

Dimostrazione.
$(a, b) = (v_2, -v_1)$ e $(v_2, -v_1) \cdot (v_1, v_2) = 0$ Q.E.D.

## Riassumendo

- Se nel piano si fissa un sistema di riferimento (un punto, detto origine e due vettori ortogonali e unitari), una coppia ordinata di numeri reali si può identificare con punto (vettore spiccato dall'origine).

- una retta del piano si può rappresentare mediante equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

o equazioni cartesiane:

$$ax + by + c = 0$$

In particolare, se $b \neq 0$ si può esplicitare rispetto a $y$:
$y = mx + q$

## Condizione di parallelismo tra rette

Siano $r$ e $s$ due rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = x_0' + v_1' u \\ y = y_0' + v_2' u \end{cases}$$

dove $t, u \in \mathbb{R}$. Allora

$$r \text{ è parallela a } s \; (r \parallel s) \quad \Longleftrightarrow \quad (v_1, v_2) = k(v_1', v_2'), \quad k \neq 0$$

# Condizione di ortogonalità tra rette

Siano $r$ e $s$ due rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = x'_0 + v'_1 u \\ y = y'_0 + v'_2 u \end{cases}$$

dove $t, u \in \mathbb{R}$. Allora

$$r \text{ è ortogonale a } s \; (r \perp s) \iff (v_1, v_2) \cdot (v'_1, v'_2) = 0$$

# Esempi di verifiche

. . . . . . . . . . . . . . . .