# 2. Funzioni a più variabili

## Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it Versione provvisoria, aprile 2015.<sup>1</sup>

# Indice

1	Massimi e minimi.		1
	1.1	Massimi e minimi liberi di funzioni di due variabili	1
	1.2	Massimi e minimi di una funzione su una varietà	3
2	Esercizi		6
	2.1	Soluzioni	8

# 1 Massimi e minimi.

## 1.1 Massimi e minimi liberi di funzioni di due variabili.

Per quanto riguarda la determinazione di massimi e minimi liberi serve ricordare quanto segue

1. Formula di Taylor con resto nella forma di Peano. Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su un aperto A di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  un punto fissato in A. Allora, per  $\mathbf{h} = (h, k) \longrightarrow (0, 0)$  si ha:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f_x(\mathbf{x}_0)h + f_y(\mathbf{x}_0)k + \frac{1}{2} \left[ f_{xx}(\mathbf{x}_0)h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{x}_0)hk + f_{yy}(\mathbf{x}_0)k^2 \right] + o(|\mathbf{h}|^2)$$

- 2. Punti stazionari. Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione definita su un aperto A di  $\mathbb{R}^2$ . Un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si dice stazionario per f (oppure critico per f) se f è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e il differenziale di f in  $\mathbf{x}_0$  è nullo. (Oppure, in modo equivalente, se il gradiente  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  di f in  $\mathbf{x}_0$  è nullo).
- 3. Punti di minimo (massimo) locale. Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione definita su un aperto A di  $\mathbb{R}^2$ . Un punto  $x_0 \in A$  si dice punto di minimo locale per f, se esiste un intorno U di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$\forall x \in U \cap A$$
  $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}_0)$ 

Un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si dice punto di massimo locale per f, se esiste un intorno U di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$\forall x \in U \cap A$$
  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0).$ 

4. Punti interni di minimo (o di massimo) locale sono stazionari.  $^{^{f}}$ 

Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione definita su un aperto A di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{x}_0$  un punto di A e f differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Nome file: Es02\_analisi\_matematica2.tex

se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo (o di massimo) locale per f

 $\mathbf{x}_0$  è un punto stazionario per f, cioè  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ 

#### 5. Forma quadratica hessiana.

Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione definita su un sottoinsieme A di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno ad A. Se in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  la funzione f è almeno di classe  $C^2$  e  $\mathbf{x}_0$  è un punto stazionario per f, la formula di Taylor al secondo ordine nel punto  $\mathbf{x}_0$  è

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2!} \left[ f_{xx}(\mathbf{x}_0)h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{x}_0)hk + f_{yy}(\mathbf{x}_0)k^2 \right] + o(|\mathbf{h}|^2)$$
(1.1)

dove  $\mathbf{h} = (h, k)$ .

Si chiama forma quadratica hessiana la funzione nelle variabili h, k

$$q(h,k) = f_{xx}(\mathbf{x}_0)h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{x}_0)hk + f_{yy}(\mathbf{x}_0)k^2$$
(1.2)

Si chiama  $matrice\ hessiana\ di\ f\ nel\ punto\ \mathbf{x}_0$  la matrice

$$H(f)_{\mathbf{x}_0} = \left[ \begin{array}{cc} f_{xx}(\mathbf{x}_0) & f_{yx}(\mathbf{x}_0) \\ f_{xy}(\mathbf{x}_0) & f_{yy}(\mathbf{x}_0) \end{array} \right]$$

### 6. Studio dei punti stazionari con la forma quadratica.

Sia  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  sull'aperto A di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A$  un punto stazionario di f,

$$q(h,k) = f_{xx}(\mathbf{x}_0)h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{x}_0)hk + f_{yy}(\mathbf{x}_0)k^2$$
(1.3)

la forma quadratica di f in  $\mathbf{x}_0$ ,

$$H = H(f)_{\mathbf{x}_0} = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right]$$

la matrice hessiana di f valutata in  $\mathbf{x}_0$ .

H è diagonalizzabile perchè simmetrica (teorema spettrale), cioè esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}'$  di  $\mathbb{R}^2$  che diagonalizza q. Questo significa che, dette (h', k') le coordinate rispetto a tale base, si ha

$$q(h', k') = \lambda_1(h')^2 + \lambda_2(k')^2$$

Pertanto il segno della forma quadratica dipende dai segni degli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  di H. I due autovalori sono le radici (reali) del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

ossia

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} H)\lambda + \det H = 0$$

Vale il seguente risultato:

- (a) se det H > 0 e tr H > 0 (cioè  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) la forma quadratica è definita positiva;  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo locale.
- (b) se det H > 0 e tr H < 0 (cioè  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ) la forma quadratica è definita negativa;  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo locale.
- (c) se det H < 0 (cioè  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ) la forma quadratica è indefinita;  $\mathbf{x}_0$  è un punto di sella.
- (d) se det H=0 (cioè  $\lambda_1=0,\,\lambda_2>0$  oppure  $\lambda_1<0,\,\lambda_2=0$ ) la forma quadratica è semidefinita; non è possibile determinare la natura di  $\mathbf{x}_0$  dalla sola conoscenza di H.

#### 1.2 Massimi e minimi di una funzione su una varietà

1. Teorema di Weierstrass Sia K un insieme compatto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $K \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  è una funzione continua su K allora f assume su K un valore massimo M e un valore minimo m cioè esistono  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$  per i quali si ha

$$\forall \mathbf{x} \in K \quad m = f(\mathbf{p}) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{q}) = M$$

2. Varietà. Sia A un aperto di  $\mathbb{R}^3$  e  $A \stackrel{g}{\longrightarrow} \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1(A)$ . L'insieme

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{x}) = 0 \} \tag{1.4}$$

per il quale

$$\forall \mathbf{p} \in S \quad \nabla g(\mathbf{p}) \neq 0 \tag{1.5}$$

si chiama varietà di dimensione due, o superficie. Se, ad esempio,  $g(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , la superficie S è la sfera unitaria di centro l'origine. Se  $g(\mathbf{x}) = x + y - z + 2$ , la superficie è un piano.

3. Piano tangente a una varietà L'ipotesi di regolarità  $\nabla g(\mathbf{p}) \neq 0$  (per ogni  $\mathbf{p} \in S$ ) assicura che in ogni punto  $\mathbf{p} \in S$  esiste il piano tangente a S. Tale piano, denotato  $T_pS$  o  $S_p$ , è costituito da tutti i vettori di  $\mathbb{R}^3$  spiccati dal punto  $\mathbf{p} \in S$  e ortogonali al vettore gradiente  $\nabla g(\mathbf{p})$ . Un modo equivalente, ma più intrinseco, di vedere il piano tangente  $T_pS$  è il seguente. Sia  $I \xrightarrow{\gamma} S$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$ , una qualunque curva liscia su S, definita su un intervallo I di  $\mathbb{R}$  contentente il numero S0, tale che S0, the per definizione, il vettore velocità di S1 all'istante S2 e ortogonali al vettore velocità di S3 all'istante S4 e ortogonali al vettore velocità di S5 e ortogonali al vettore velocità di S6 e ortogonali al vettore velocità di S7 all'istante S8 e ortogonali al vettore velocità di S9. Per definizione, il vettore velocità di S3 all'istante S4 e ortogonali al vettore velocità di S4 all'istante S5 e ortogonali al vettore velocità di S6 e ortogonali al vettore velocità di S7 all'istante S8 e ortogonali al vettore velocità di S9 e ortogonali al vettore velocità di S9 e ortogonali al vettore velocità di S8 e ortogonali al vettore velocità di S9 e ortogonali al vettore velocità di S8 e ortogonali al vettore velocità di S9 e ortogonali al vettore velocità di S1 e ortogonali al vettore velocità di S2 e ortogonali al vet

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \tag{1.6}$$

Il piano tangente  $T_pS$  è allora costituito da tutti i possibili vettori velocità  $\gamma'(0)$  di curve parametrizzate  $\gamma(t)$  su S che passano per  $\mathbf{p}$  all'istante t=0.

4. Punti di massimo (minimo) locale su una varietà . Sia A un aperto di  $\mathbb{R}^3$ ,  $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1(A)$  e  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$  una varietà ( $\nabla g \neq 0$  su S). Un punto  $\mathbf{p} \in S$  si dice punto di massimo locale di f su S se vale la seguente proprietà: esiste un intorno W di  $\mathbf{p}$  in  $\mathbb{R}^3$  tale che per ogni punto  $\mathbf{x} \in W \cap S$  si ha

$$f(\mathbf{p}) \ge f(\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

Analoga è la definizione di punto di minimo di f su S.

5. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia  $\mathbf{p} \in S$  un punto di minimo o di massimo locale per la funzione f sulla varietà S. Allora il gradiente  $\nabla f(\mathbf{p})$  è ortogonale alla varietà S nel punto  $\mathbf{p}$ , ossia  $\nabla f(\mathbf{p})$  è multiplo del gradiente  $\nabla g(\mathbf{p})$ . Questo equivale a dire che esiste un numero  $\lambda$  per il quale vale

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \, \nabla g(\mathbf{p}) \tag{1.8}$$

Il numero  $\lambda$  si dice moltiplicatore di Lagrange.

Dimostrazione. Si deve dimostrare che il vettore  $\nabla f(\mathbf{p})$  è ortogonale a ogni vettore  $\mathbf{v}$  che appartiene al piano tangente  $S_p$ . Sia dunque  $\mathbf{v}$  un qualunque vettore di  $S_p$  e sia  $\gamma(t), t \in I$ , una curva parametrizzata su S (cioè con  $\gamma(t) \in S$  per ogni t), che all'istante t = 0 passa per  $\mathbf{p}$  con velocità  $\mathbf{v}$ :

$$\gamma(0) = \mathbf{p} \qquad \qquad \gamma'(0) = \mathbf{v} \tag{1.9}$$

Per ipotesi,  $\mathbf{p}$  è un punto di minimo (o di massimo) di f su S, quindi la funzione di una variabile  $f(\gamma(t))$  ha un minimo (locale) in t=0. Dunque la sua derivata si annulla in 0:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0 \tag{1.10}$$

Ma la derivata di questa funzione composta è data dal prodotto scalare del gradiente di f con il vettore velocità  $\gamma'(t)$ :

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \tag{1.11}$$

Pertanto per t=0 si ha

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = (\nabla f)(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$$
 (1.12)

perché  $\gamma(0) = \mathbf{p} \in \gamma'(0) = \mathbf{v}$ . Dunque  $\nabla f(\mathbf{p})$  è ortogonale a  $\mathbf{v}$ .

Si può leggere il teorema in questi termini:

Se  $\mathbf{x} \in S$  è un punto di minimo o di massimo di f su S, allora deve esistere un numero  $\lambda$  (moltiplicatore di Lagrange) per il quale sono soddisfatte le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) &= \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) &= 0 \end{cases}$$
 (1.13)

La prima equazione dice che il vettore  $\nabla f(X)$  è ortogonale a S nel punto  $\mathbf{x}$  e la seconda che  $\mathbf{x}$  appartiene alla superficie (al vincolo) S.

Tutto quanto è stato detto finora vale anche nello spazio  $\mathbb{R}^2$ . In tale caso, si ha una funzione g = g(x, y) definita su un aperto A di  $\mathbb{R}^2$ . Sia C la curva (varietà di dimensione uno) definita da

$$C = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = 0 \} \tag{1.14}$$

Naturalmente si suppone che  $\nabla g(\mathbf{p})$  sia non nullo per ogni  $\mathbf{p}$  in C, in modo che esista la retta tangente a C in ogni suo punto. Tale retta tangente è ovviamente la retta passante per  $\mathbf{p}$  e ortogonale al vettore  $\nabla g(\mathbf{p})$ .

6. Il caso di più vincoli. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange vale anche in presenza di più vincoli. Siano  $g_1, ..., g_h$  funzioni reali di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^n$  e sia h < n. Si indichi con M l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  sui quali tutte le funzioni  $g_j$  (j = 1, ..., h) si annullano:

$$M = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_h(\mathbf{x}) = 0 \}$$
 (1.15)

Si supponga inoltre che i gradienti  $\nabla g_1(\mathbf{p}), ...., \nabla g_h(\mathbf{p})$  siano linearmente indipendenti in ogni punto  $\mathbf{p}$  che appartiene a M. Sotto questa condizione di regolarità, in ogni punto  $\mathbf{p}$  di S si può definire lo spazio tangente  $M_p$ , che risulta essere uno spazio vettoriale di dimensione n-h. (Si tratta dello spazio di vettori di  $\mathbb{R}^n$  uscenti da  $\mathbf{p}$  e ortogonali a  $\nabla g_1(\mathbf{p}), ...., \nabla g_h(\mathbf{p})$ ). Si dice allora che M è una varietà di dimensione n-h. Esattamente come nel caso di un solo vincolo, si dimostra quanto segue:

Se  $\mathbf{x} \in M$  è un punto di minimo o di massimo locale per la funzione  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  (di classe  $C^1$ ) sulla varietà M, allora esistono h numeri  $\lambda_1, ..., \lambda_h$  (detti moltiplicatori di Lagrange) per i quali valgono le equazioni:

$$\begin{cases}
\nabla f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \\
g_1(\mathbf{x}) &= 0 \\
g_2(\mathbf{x}) &= 0 \\
\dots \\
g_h(\mathbf{x}) &= 0
\end{cases} \tag{1.16}$$

La prima equazione dice che  $\nabla f(\mathbf{x})$  è ortogonale a M nel punto  $\mathbf{x}$ , mentre l'ultima dice che  $\mathbf{x}$  sta sulla varietà M.

7. Una interpretazione meccanica. Si supponga di voler cercare i punti di equilibrio di un punto materiale  $\mathbf{p}$  vincolato a stare su una varietà M, di equazioni

$$g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_h(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.17}$$

Il punto  $\mathbf{p}$  è soggetto simultaneamente agli h vincoli di equazioni  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ , i = 1, ..., h. Si supponga che sul punto agisca una forza conservativa W di potenziale f, vale a dire una forza data da  $W = \nabla f$ . In base ai principi della statica, possiamo eliminare il vincolo  $g_1 = 0$ , a patto di introdurre un'altra forza, detta reazione vincolare, che agisce ortogonalmente al vincolo  $g_1 = 0$ , cioè una forza del tipo  $-\lambda_1 \nabla g_1$ . In modo analogo si possono eliminare tutti gli altri vincoli, pur di aggiungere le relative reazioni vincolari, che sono del tipo  $-\lambda_2 \nabla g_2, ..., -\lambda_h \nabla g_h$ . L'equilibrio si raggiunge quando la somma delle forze che agiscono sul punto è nulla, cioè quando

$$\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \dots - \lambda_h \nabla g_h = 0 \tag{1.18}$$

# 2 Esercizi

Esercizio 2.1 Trovare massimi e minimi locali delle seguenti funzioni

a) 
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ 

b) 
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 

c) 
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ 

d) 
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 

e) 
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 2y^2 + \frac{1}{3}x^3$ 

### Esercizio 2.2 Sia

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \ f(x,y) = x^4 - x^2 y^2$$

Determinare i punti critici di f e la loro natura.

Esercizio 2.3 Tra le scatole a forma di parallelepipedo rettangolo di volume assegnato V, si determini quella di area minima.

Esercizio 2.4 Si determini il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$Q \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
,  $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$ 

 $sul\ quadrato\ Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}.$ 

**Esercizio 2.5** Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione f(x,y) = xy sulla circonferenza  $S^1$  di equazione  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Esercizio 2.6 Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di assegnata superficie totale, trovare quello (se esiste) di volume massimo.

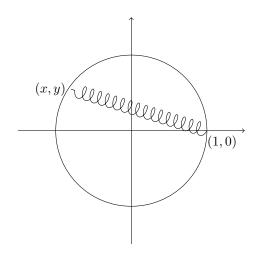
Esercizio 2.7 Sia  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto fissato, diverso dall'origine, in  $\mathbb{R}^3$ . Trovare sulla sfera  $S^2$  di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  il punto più vicino a  $X_0$  e il punto più lontano da  $X_0$ . (La risposta è ovvia. La si trovi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange).

Esercizio 2.8 Una ditta deve spendere una cifra di denaro pari a 90 per acquistare delle macchine di tipo A al prezzo di 3 l'una e delle macchine di tipo B al prezzo di 5 l'una. Supponiamo che acquisti x macchine A e y macchine B. Per avere la massima utilità, il prodotto xy deve essere massimo. Quante macchine di ogni tipo deve acquistare?

Nota: La funzione f(x,y) (nel nostro esempio f(x,y) = xy) che fornisce l'utilità che deriva dalla vendita di x unità di una merce e di y unità di un'altra, è detta dagli economisti funzione di utilità.

Esercizio 2.9 Trovare i punti sull'ellisse  $x^2 + 4y^2 = 4$  a distanza minima, e a distanza massma, dalla retta x + y - 4 = 0.

Esercizio 2.10  $^2$  Un punto materiale di massa m, soggetto alla forza gravitazionale, è vincolato a muoversi lungo la circonferenza verticale  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ed è collegato al punto (1,0) da una molla ideale con costante elastica k. Trovare le posizioni di equilibrio (stabile o instabile) del punto, sotto l'azione della forza di gravità e della forza elastica dela molla.



<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Enrico Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, 1988.

### 2.1 Soluzioni

#### Esercizio 2.1

- a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 6y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y$ . I punti stazionari sono le soluzioni del sistema  $\begin{cases} x^2 = y \\ x = y \end{cases}$  ossia i punti (0,0) e (1,1). Inoltre  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$ .  $H(f)_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$ ,  $\det H(f)_{(0,0)} = -36 < 0$ . Quindi (0,0) è un punto di sella.  $H(f)_{(1,1)} = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$ ,  $\det H(f)_{(1,1)} > 0$  e tr H > 0. Quindi (1,1) è un punto di minimo.
- b)  $\nabla f(x,y) = 0$  in (0,0), (1,1) e (-1,-1). (0,0) è punto di sella, (1,1) è punto di minimo mentre (-1,-1) è punto di massimo. f(1,1) = f(-1,-1) = -1 e f(0,0) = 1.
- c)  $\nabla f(x,y) = 0$  in (1,3). Utilizzando il metodo del completamento del quadrato si ottiene  $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$ ; per ogni  $(x,y) \neq (1,3)$  f(x,y) > 4 mentre in (1,3) la funzione vale zero. Pertanto il punto (1,3) è punto di minimo locale e assoluto per f. Il grafico di f è un paraboloide ellittico.
- d) La funzione è simmetrica rispetto all'origine. I punti critici di f sono: (0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) L'origine è un punto di sella; (1,1) e (-1,-1) sono massimi locali; (1,-1) e (-1,1) minimi locali.
- e) I punti critici di f sono: (0,0),  $(-2,\sqrt{2})$ ,  $(-2,-\sqrt{2})$ . Tutti e tre i punti sono punti di sella.

**Esercizio 2.2** I punti critici di f sono (0, y),  $y \in \mathbb{R}$ . (0, 0) è un punto di sella, mentre (0, y),  $y \neq 0$  sono punti di massimo locale (studiare il segno di f).

**Esercizio 2.3** Siano x,y,z (x,y,z>0) le tre dimensioni del parallelepipedo; la sua superficie totale è

$$S(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz \tag{2.1}$$

Inoltre vale la condizione

$$V = xyz (2.2)$$

Esplicitando rispetto a z l'uguaglianza (2.2) e sostituendo in (2.1) si ottiene

$$S(x,y) = 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

I punti critici di S sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 2y - \frac{2V}{x^2} = 0\\ \frac{\partial S}{\partial y} = 2x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Si ricava

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2 y &= V \\ xy^2 &= V \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 y - xy^2 &= 0 \\ xy^2 &= V \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{ll} xy(x-y) &= 0 \\ xy^2 &= V \end{array} \right. .$$

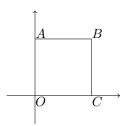
Essendo x, y > 0 si ha

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ xy^2 = V \end{cases}, \quad \begin{cases} x = y \\ x^3 = V \end{cases}$$

Quindi
$$x=y=V^{\frac{1}{3}}$$
e $z=\frac{V}{xy}=V^{\frac{1}{3}}.$ 

#### Esercizio 2.4

Il dominio di f è rappresentato nella figura qui sotto.



1. Analisi dei punti interni di Q.

I punti critici di f interni al quadrato Q si trovano ponendo  $\nabla f(x,y) = 0$ , cioè

$$\begin{cases} f_x = 2x - y = 0 \\ f_y = 6y - 1 - x = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è  $(\frac{1}{11}, \frac{2}{11})$ ; con il metodo dell'hessiano è immediato verificare che tale punto è un minimo locale, risulta inoltre  $f(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}) = -\frac{1}{11}$ .

2. Analisi dei punti che appartengono al bordo  $\partial Q$  (esclusi i vertici del quadrato).

 $f(0,y) = 3y^2 - y$  (restrizione di f al lato OA) ha un minimo locale in  $y = \frac{1}{6}$  e  $f(0,\frac{1}{6}) = -\frac{1}{12}$ .  $f(x,0) = x^2$  (restrizione di f al lato OC) è sempre crescente.

 $f(x,1)=x^2-x+2$  (restrizione di f al lato AB) ha un minimo locale in  $x=\frac{1}{2}$  e  $f(\frac{1}{2},1)=\frac{7}{4}$ .  $f(1,y)=3y^2-2y+1$  (restrizione di f al lato BC) ha un minimo locale in  $y=\frac{1}{3}$  e  $f(1,\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$ .

3. Analisi dei vertici del quadrato.

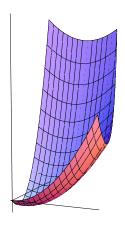


Figura 1: Grafico della funzione  $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$ .

$$f(0,0) = 0$$
,  $f(0,1) = 2$ ,  $f(1,0) = 1$ ,  $f(1,1) = 2$ .

Dal confronto dei valori assunti da f nei punti di massimo o minimo e nei vertici del quadrato segue che il minimo assoluto di f in  $Q 

è <math>-\frac{1}{11}$ , mentre il massimo assoluto è 2.

### Esercizio 2.5

Sicuramente esistono almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo, perché f(x,y) = xy è continua e  $S^1$  è un compatto. Anzi, siccome la forma quadratica f(x,y) = xy assume lo stesso valore in punti antipodali su  $S^1$  (cioè f(x,y) = f(-x,-y)), i punti di massimo vengono in coppia (e analogamente i punti di minimo).

 $Primo\ metodo$ . Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Notiamo che il gradiente di  $x^2+y^2-1$  è (2x,2y), sempre diverso da zero su  $S^1$ . Troviamo i punti stazionari della lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

ossia i punti  $(x, y, \lambda)$  nei quali il gradiente di L si annulla. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} y - 2\lambda x &= 0\\ x - 2\lambda y &= 0\\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$
 (2.3)

Dalle prime due equazioni, si ricava

$$2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

(Si noti che deve essere  $x \neq 0$ . Infatti, x = 0 implica y = 0, e quindi la terza equazione del sistema non è soddisfatta. Analogamente, si deve avere  $y \neq 0$ ). Allora  $x^2 = y^2$ . Sostituendo nell'equazione del vincolo  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  si ottengono i quattro punti

$$A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad A' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

(In questo caso, per risolvere il sistema, non è necessario trovare esplicitamente i valori di  $\lambda$ ). Si ha  $f(A) = f(A') = \frac{1}{2}$  e  $f(B) = f(B') = -\frac{1}{2}$ . Quindi A e A' sono punti di massimo e B, B' sono punti di minimo. Il valore massimo è  $\frac{1}{2}$  e il valore minimo è  $-\frac{1}{2}$ .

Secondo metodo. La funzione f(x,y) = xy è una forma quadratica (cioè un polinomio omogeneo di secondo grado). La matrice simmetrica associata a f è

$$A = \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right| \tag{2.4}$$

Gli autovalori di A sono  $\lambda_1=\frac{1}{2}$  e  $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ . Il massimo degli autovalori (cioè  $\lambda_1=\frac{1}{2}$ ) è il massimo valore che f assume su  $S^1$ , mentre il minimo autovalore ( $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ) è il valore minimo di f su  $S^1$ . I relativi autospazi, soluzioni dei sistemi  $AX=\frac{1}{2}X$  e  $AX=-\frac{1}{2}X$ , sono rispettivamente le rette di equazione:

$$x - y = 0, x + y = 0 (2.5)$$

Gli autovettori unitari

$$A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad A' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

(intersezioni della retta x-y=0 con  $S^1$ ) sono punti di massimo. Analogamente, gli autovettori unitari

$$B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
  $B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 

(intersezioni della retta x + y = 0 con  $S^1$ ) sono punti di minimo.

#### Esercizio 2.6

Si tratta di rendere massima la funzione f(x, y, z) = xyz sull'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \ xy + xz + yz = a^2\}$$
 (2.6)

dove a è un numero positivo assegnato. A priori, non è evidente che la funzione f debba assumere un valore massimo su T, che non è compatto (perché non è limitato). Possiamo però ragionare nel modo seguente. Quando il punto (x,y,z) tende all'infinito, sempre restando su T, il valore f(x,y,z) = xyz tende a zero. Infatti, dall'equazione di T si ricava

$$xy \le a^2$$
  $xz \le a^2$ 

e quindi

$$f(x, y, z) = xyz \le x \frac{a^2}{x} \frac{a^2}{x} = \frac{a^4}{x}$$

Dunque xyz tende a zero, quando (x, y, z) va all'infinito, stando sull'insieme T. Quindi esiste una sfera (piena) B centrata nell'origine (e di raggio abbastanza grande) tale che nei punti di T che si trovano al di fuori di B, sicuramente f non assume il valore massimo. La parte di T che è contenuta in B è un compatto, sul quale f assume il valore massimo. Tale valore massimo non può essere raggiunto nei punti in cui una delle tre variabili è nulla, perché in tali punti f vale zero. Dunque il valore massimo esiste e viene raggiunto in punti di T con le coordinate positive. In tali punti  $\nabla q(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \neq 0$ , quindi si

applica il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Non resta che trovare i punti stazionari della lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + xz + yz - a^2)$$

Uguagliando a zero il gradiente di L, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} yz - \lambda(y+z) &= 0\\ xz - \lambda(x+z) &= 0\\ xy - \lambda(x+y) &= 0\\ xy + xz + yz - a^2 &= 0 \end{cases}$$

Allora  $\lambda \neq 0$ , perché  $xyz \neq 0$ . Dalle prime due equazioni si ricava

$$\frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z}$$

Di qui yz=xz, ossia y=x. Per simmetria, si deve avere anche x=z. Allora le soluzioni del sistema hanno x=y=z. Sostituendo nell'ultima equazione, si ha  $3x^2=a^2$ . Quindi esiste un unico punto stazionario di L su T, di coordinate  $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$ , che non può che essere il punto di massimo del quale abbiamo dimostrato l'esistenza. Dunque il parallelepipedo cercato è il cubo.

Si noti che dall'argomentazione svolta segue anche che non esiste il parallelepipedo (non degenere) che realizzi il volume minimo. (Questo si può facilmente dimostrare in modo più diretto).

#### Esercizio 2.7

Si tratta di trovare i punti di massimo e di mnimo della funzione

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

sulla varietà

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} x - x_0 &= \lambda x \\ y - y_0 &= \lambda y \\ z - z_0 &= \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

Facendo i conti, si trova che le soluzioni sono

$$X = \frac{X_0}{|X_0|}, X = -\frac{X_0}{|X_0|}$$

(di ovvia interpretazione geometrica) che sono, rispettivamente, il punto più vicino e quello più lontano.

### Esercizio 2.8

Si deve rendere massima la funione f(x,y) = xy, soggetta al vincolo

$$g(x,y) = 3x + 5y - 90 = 0$$

Si ha

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$
$$\nabla g(x,y) = (3,5)$$

Il massimo si ha in corrispondenza dei valori di  $\lambda$  per i quali

$$(y, x) = \lambda(3, 5)$$

ossia

$$y = 3\lambda$$
  $x = 5\lambda$ 

Sostituendo nell'equazione del vincolo 3x + 5y - 90 = 0, si ha  $\lambda = 3$ . Pertanto il punto di massimo è  $(5\lambda, 3\lambda) = (15, 9)$ . La risposta è che la ditta deve comprare 15 macchine del tipo A e 9 del tipo B.

Esercizio 2.9 Ricordiamo che la distanza di un punto (x,y) dalla retta ax + by + c = 0 è

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nel nostro caso, si tratta di rendere minima o massima la restrizione della funzione distanza

$$\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}$$

all'ellisse  $x^2+4y^2-4=0$ . Siccome l'ellisse si trova nel semipiano x+y-4<0, possiamo semmplificare il problema scrivendo -x-y+4 al posto di |x+y-4|. Dunque la funzione da ottimizzare è f(x,y)=-x-y+4 (Abbiamo trascurato il denominatore  $\sqrt{2}$ ). In definitiva si devono trovare il valore massimo e il valore minimo di f(x,y)=-x-y+4 sul vincolo  $g(x,y)=x^2+4y^2-4=0$ . Poiché l'ellisse è un compatto, per il teorema di Weierstrass tali valori massimo e minimo esistono sicuramente. Il sistema (di Lagrange) da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases}
-1 &= \lambda 2x \\
-1 &= \lambda 8y \\
x^2 + 4y^2 - 4 &= 0
\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava x=4y. Dobbiamo ora tenere conto del vincolo (cioè della terza equazione del sistema). Dobbiamo dunque considerare le intersezioni della retta x=4y con l'ellisse  $x^2+4y^2-4=0$ . Otteniamo i punti

$$(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \qquad (-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

Le distanze di tali punti dalla retta x + y - 4 = 0 si ottengono sostituendo le loro coordinate nell'espressione

$$\frac{-x-y+4}{\sqrt{2}}$$

Tali distanze sono dunque rispettivamente

$$\frac{-\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}$$

Dunque il primo punto è quello a distanza minima, il secondo è quello a distanza massima.

Interpretazione geometrica: Nel fascio delle rette (tra loro parallele) ortogonali alla retta x+y-4=0, occorre trovare le rette che (in almeno uno dei punti di intersezione con l'ellisse) taglino l'ellisse ortogonalmente.

#### Esercizio 2.10

I punti di equilibrio stabile sono quelli in cui l'energia ha un minimo, mentre i punti di equilibrio instabile sono quelli in cui l'energia ha un massimo. L'energia potenziale dovuta al campo gravitazionale è

$$E_1 = mgy$$

(dove g è l'accelerazione di gravità ), mentre l'energia dovuta alla forza elastica è

$$E_2 = \frac{1}{2}k[(x-1)^2 + y^2]$$

Si tratta allora di trovare i punti di minimo e di massimo della funzione

$$E(x,y) = mgy + \frac{1}{2}k[(x-1)^2 + y^2]$$
(2.7)

sul vincolo  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Un modo per risolvere il problema consiste nel parametrizzare la circonferenza e ricondursi a un problema di massimi e minimi per una funzione di una sola variabile. Vediamo invece come si procede con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla E(x,y) - \lambda \nabla (x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$
 (2.8)

si scrive nel modo seguente

$$\begin{cases} k(x-1) - \lambda 2x &= 0\\ mg + ky - \lambda 2y &= 0\\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$
 (2.9)

Dalle prime due equazioni si ricava

$$x = \frac{k}{k - 2\lambda}, \quad y = -\frac{mg}{k - 2\lambda} \tag{2.10}$$

Sostiutendo tali valori nella terza equazione, si ha

$$(k - 2\lambda)^2 = k^2 + m^2 g^2$$

ossia

$$k - 2\lambda = \pm \sqrt{k^2 + m^2 g^2}$$

Sostituendo tali valori di  $k-2\lambda$  in 2.10 si trovano i punti

$$P_1 = \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2 g^2}}, \frac{-mg}{\sqrt{k^2 + m^2 g^2}}\right), \qquad P_2 = \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + m^2 g^2}}, \frac{mg}{\sqrt{k^2 + m^2 g^2}}\right) \tag{2.11}$$

Calcolando i valori di E(x,y) nei due punti  $P_1, P_2$ , si trova

$$E(P_1) = k - \sqrt{k^2 + m^2 g^2}, \quad E(P_2) = -k + \sqrt{k^2 + m^2 g^2}$$

Dunque  $P_1$  è un punto di minimo vincolato (punto di equilibrio stabile) e  $P_2$  è un punto di massimo vincolato (punto di equilibrio instabile).