

Flusso, divergenza e rotore

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

1	Divergenza	2
1.1	Flusso di un campo di forze attraverso un cubo di dimensioni infinitesime. . .	2
1.2	Interpretazione della divergenza come densità di flusso.	3
2	Teorema della divergenza (di Gauss).	4
2.1	Esempi	4
3	Rotore	5
3.1	Circuitazione di un campo di forze lungo un quadrato di dimensioni infinitesime avente i lati paralleli agli assi coordinati	5
4	Teorema di Stokes	7
4.1	Alcune identità riguardanti gradiente, divergenza e rotore	8
5	Teorema di Green	10
5.1	Alcune esercizi che utilizzano il teorema di Green	10
5.2	Risposte.	11
6	Equazioni di Maxwell: dalla forma integrale a quella differenziale	12
7	Esercizi di analisi vettoriale	15
7.1	Soluzioni.	19

1 Divergenza

Definizione 1.1 (di divergenza). Sia

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

un campo vettoriale di classe almeno C^1 su \mathbb{R}^3 . Sia S chiamata divergenza di \mathbf{F} (si scrive: $\operatorname{div} \mathbf{F}$ oppure $\nabla \cdot \mathbf{F}$) il campo scalare:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)_{(x,y,z)}$$

La divergenza si estende in modo ovvio a un numero n qualsiasi di dimensioni; per $n = 2$ (caso bidimensionale), si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right)_{(x,y)}$$

dove $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$ è un campo vettoriale di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

1.1 Flusso di un campo di forze attraverso un cubo di dimensioni infinite-sime.

Le note di questa sezione si ispirano a R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Part 1, pp. 3-7; per maggiori chiarimenti si rimanda al testo.

Si consideri in \mathbb{R}^3 un cubetto infinitesimo con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e si orienti la superficie del cubetto con la normale uscente (si veda la figura riportata qui sotto). Si vuole determinare il flusso del campo di forze

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

(di classe almeno C^1 , definito su \mathbb{R}^3) uscente dalla superficie del cubetto.

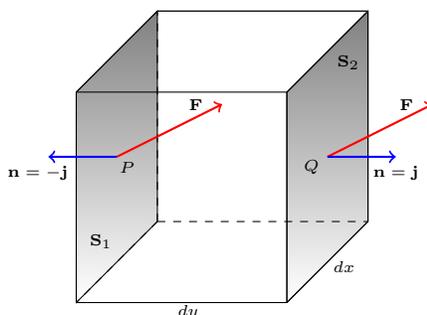


Figura 1: Il teorema della divergenza in termini infinitesimali. Il cubo ha dimensioni dx, dy, dz con $dx = dy = dz$. Le variazioni di \mathbf{F} su ogni faccia sono supposte trascurabili.

Si fissi l'attenzione su due facce opposte del cubetto, per esempio S_1, S_2 e si indichi con $\mathbf{F}(P)$ e $\mathbf{F}(Q)$ i valori che il campo di forze assume rispettivamente al centro della faccia S_1 e della faccia S_2 . Si ha:

$$\begin{aligned}
 \text{Flusso uscente da } S_1 &= \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dz \\
 &= -F_2(P) \, dx \, dz \\
 \text{Flusso uscente da } S_2 &= \mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dz \\
 &= F_2(Q) \, dx \, dz \\
 &\approx \left[F_2(P) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) \, dy \right] \, dx \, dz \\
 &= F_2(P) \, dx \, dz + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) \, dx \, dy \, dz
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La quantità $F_2(Q)$ (componente di \mathbf{F} normale alla superficie S_2) è stata approssimata al primo ordine, cioè sono stati trascurati i termini dx^n con $n \geq 2$. Sommando i flussi uscenti da S_1 e S_2 si ottiene:

$$\text{Flusso uscente da } S_1 \text{ e } S_2 = \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) \, dx \, dy \, dz \tag{1.2}$$

Il flusso totale uscente dalla superficie dS del cubetto infinitesimo è dato dalla somma dei flussi uscenti dalle tre coppie di facce opposte. Per questioni di simmetria si ha

$$\begin{aligned}
 \text{Flusso uscente dal cubetto} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove dV è il volume del cubetto.

1.2 Interpretazione della divergenza come densità di flusso.

Dall'uguaglianza (1.3) si ricava

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\text{Flusso uscente dal cubetto}}{\text{Volume del cubetto}} \tag{1.4}$$

Quindi la divergenza di \mathbf{F} fornisce il flusso per unità di volume, cioè la *densità volumetrica di flusso*.

2 Teorema della divergenza (di Gauss).

Se Ω designa un solido (compatto) di volume V delimitato da una superficie chiusa $\partial\Omega$, il flusso uscente da $\partial\Omega$ è dato dalla somma dei flussi uscenti da tanti cubetti infinitesimi contenuti in Ω . Si ottiene il seguente importante risultato

Teorema 2.1 (della divergenza (di Gauss)). *Sia Ω un solido compatto di volume V , il cui bordo $\partial\Omega$ è una superficie chiusa, orientata con la normale \mathbf{n} uscente da $\partial\Omega$. Se $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$ allora*

$$\text{Flusso uscente da } S = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \quad (2.1)$$

2.1 Esempi

Esempio. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$$

Determinare il flusso di F uscente dal bordo $\partial\Omega$ della regione solida delimitata dal cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e dai piani $x = -1$, $x = 2$.

Soluzione. Si orienti S con il vettore normale \mathbf{n} che punta verso l'esterno. Utilizzando il teorema della divergenza si ha

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (3y^2 + 3z^2) dV$$

In coordinate cilindriche ($x = x$, $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$) si ottiene:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V 3y^2 + 3z^2 dV = \int_{-1}^2 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3r^3 dr = \frac{9}{2}\pi$$

Esempio. Determinare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + yz, xz + y^3, xy + z^3 + 1)$$

uscite dal bordo $\partial\Omega$ del solido definito dalle seguenti disuguaglianze: $z^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Soluzione. Per il teorema della divergenza si ha $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV$, dove V è il volume di Ω .

In coordinate sferiche tale solido è individuato dalle seguenti disuguaglianze: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pertanto si ottiene, in (r, θ, φ) :

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{3}{10}(2 - \sqrt{2}).$$

3 Rotore

Definizione 3.1 (di rotore). Sia

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

un campo vettoriale di classe almeno C^1 su \mathbb{R}^3 . Si chiama rotore di \mathbf{F} (si scrive: $\text{rot } \mathbf{F}$ oppure $\nabla \times \mathbf{F}$) il campo vettoriale:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{rot } \mathbf{F} = \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right]_{(x,y,z)}$$

Il rotore è definito in \mathbb{R}^3 . Ovviamente esso è definito anche per campi vettoriali $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ aventi una componente nulla:

- 1) Se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$, $\text{rot } \mathbf{F} = \left[0, 0, \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right]_{(x,y,0)}$
- 2) Se $\mathbf{F} = (F_1, 0, F_3)$, $\text{rot } \mathbf{F} = \left[0, \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), 0 \right]_{(x,0,z)}$
- 3) Se $\mathbf{F} = (0, F_2, F_3)$, $\text{rot } \mathbf{F} = \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right), 0, 0 \right]_{(0,y,z)}$

In altre parole, è possibile ‘estendere’ la definizione di rotore anche al caso di campi vettoriali bidimensionali purchè siano pensati immersi in \mathbb{R}^3 .

3.1 Circuitazione di un campo di forze lungo un quadrato di dimensioni infinitesime avente i lati paralleli agli assi coordinati

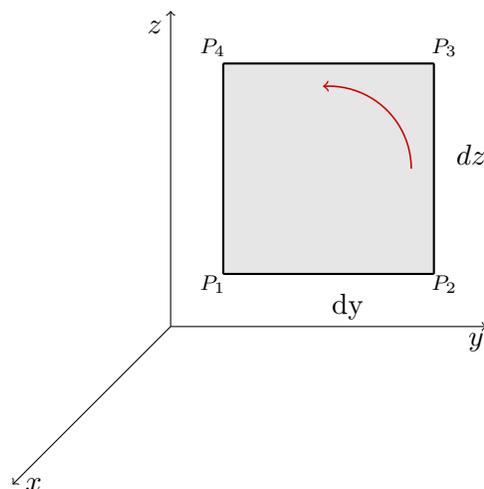


Figura 2: Il teorema di Stokes in termini infinitesimali. Il quadrato ha dimensioni dy, dz con $dy = dz$.

Si consideri in \mathbb{R}^3 un quadrato infinitesimo con i lati paralleli agli assi y e z , orientato con la normale uscente. Si vuole determinare la circuitazione del campo di forze

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

(di classe almeno C^1 , definito su \mathbb{R}^3) lungo il bordo del quadrato, percorso in senso anti-orario (l'orientazione del bordo è quella ereditata dal quadrato).

La circuitazione è data dalla somma di $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ lungo ciascuno dei quattro lati del quadrato. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{lato } P_1P_2 &= F_2 dy \\ \text{lato } P_3P_4 &= -\left(F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz\right) dy \\ \text{lato } P_4P_1 &= -F_z dz \\ \text{lato } P_2P_3 &= \left(F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy\right) dz \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quindi, la circuitazione di \mathbf{F} lungo il bordo del quadrato è

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy dz \\ &= (\text{rot } \mathbf{F})_1 dy dz \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ripetendo lo stesso procedimento rispetto a un quadrato infinitesimo con i lati paralleli agli assi x , z e poi rispetto a un quadrato infinitesimo con i lati paralleli agli assi x , y si ottiene:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dx dz \\ &= (\text{rot } \mathbf{F})_2 dy dz \end{aligned} \tag{3.3}$$

e infine

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dz \\ &= (\text{rot } \mathbf{F})_3 dx dy \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si consideri ora il caso di un quadratino infinitesimo dS posto in posizione generica rispetto agli assi coordinati e avente per normale (unitaria) il vettore \mathbf{n} . Le proiezioni ortogonali di dS sui tre piani ortogonali sono: $\cos \widehat{nx} dS = dy dz$, $\cos \widehat{ny} dS = dx dz$, $\cos \widehat{nz} dS = dx dy$.

Con considerazioni simili a quelle esposte sopra si dimostra che la circuitazione $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ di \mathbf{F} lungo il contorno di dS è data da:

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= (\text{rot } \mathbf{F})_1 dy dz + (\text{rot } \mathbf{F})_2 dx dz + (\text{rot } \mathbf{F})_3 dx dy \\
&= (\text{rot } \mathbf{F})_1 \cos \widehat{nx} dS + (\text{rot } \mathbf{F})_2 \cos \widehat{ny} dS + (\text{rot } \mathbf{F})_3 \cos \widehat{nz} dS \\
&= \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Segue che la circuitazione di \mathbf{F} lungo il bordo di un quadratino infinitesimo è uguale al flusso del rotore di \mathbf{F} uscente dalla superficie dS del quadratino.

4 Teorema di Stokes

Sia γ una curva orientata chiusa e S una superficie il cui bordo coincide con γ ($\partial S = \gamma$). Un modo per esprimere la circuitazione di \mathbf{F} lungo γ consiste nel procedere come segue:

- 1) si suddivide S in tanti quadratini infinitesimi;
- 2) si calcola la circuitazione di \mathbf{F} lungo il bordo di ciascun quadratino;
- 3) si sommano tutti i contributi trovati.

Da quanto affermato nel paragrafo precedente segue che la somma di tutte le circuitazioni di \mathbf{F} lungo il bordo dei quadratini infinitesimi fornisce il flusso del rotore di \mathbf{F} uscente da S .

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

dove l'integrale a primo membro è esteso a tutti i quadratini infinitesimi racchiusi da γ .

D'altra parte l'integrale $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ fornisce anche la circuitazione di \mathbf{F} lungo la curva γ . Infatti, con riferimento alla figura qui sotto, in ogni coppia di quadratini contigui, i contributi delle circuitazioni di \mathbf{F} lungo il lato in comune si elidono perchè compaiono in entrambe le circuitazioni con segno opposto a causa del diverso verso di percorrenza.

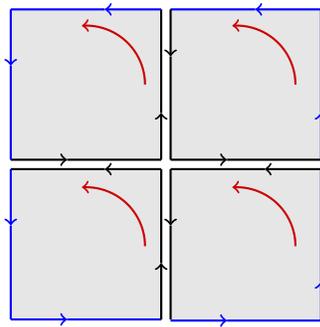


Figura 3: Ogni coppia di quadratini contigui hanno i lati interni sovrapposti; in figura sono stati volutamente separati per evidenziare che quando si eseguono le circuitazioni infinitesime essi vengono sempre percorsi due volte con verso di percorrenza opposto. Per tale motivo la somma delle quattro circuitazioni infinitesime fornisce la circuitazione lungo il perimetro evidenziato in blu.

Ne segue che la somma di tutte le circuitazioni è uguale alla circuitazione di \mathbf{F} lungo i lati ‘esterni’ dei quadratini infinitesimi; cioè quelli che delimitano la curva. In ultima analisi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Le considerazioni euristiche espresse sopra spiegano il seguente importante risultato

Teorema 4.1 (di Stokes.). *Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$, un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ e S una superficie orientata di \mathbb{R}^3 il cui bordo ∂S consiste di una o più curve chiuse, continue a pezzi, con orientazione ereditata da S . Allora:*

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.1)$$

4.1 Alcune identità riguardanti gradiente, divergenza e rotore

Definizione 4.2 (Campi vettoriali solinoidali e irrotazionali). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω .*

(a) $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ si dice solenoidale in Ω se $\text{div } \mathbf{F} = 0$, per ogni $(x, y, z) \in \Omega$.

(b) $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ si dice irrotazionale in Ω se $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, per ogni $(x, y, z) \in \Omega$.

Definizione 4.3. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione scalare di classe $C^2(\Omega)$. f si dice armonica se soddisfa l'equazione*

$$\text{div } \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \quad (4.2)$$

detta equazione di Laplace. Se si scrive $\nabla \cdot$ al posto di div , l'equazione di Laplace si scrive simbolicamente

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0 \quad (4.3)$$

dove $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ è detto operatore di Laplace o laplaciano.

Teorema 4.4. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^2 su Ω . Allora*

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

Dimostrazione.

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Quindi, il rotore di un qualunque campo vettoriale è solenoidale.

Teorema 4.5. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 . Sia $\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^2 su Ω . Allora

$$\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$$

Dimostrazione.

$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$. La prima componente di $\operatorname{rot} \nabla \varphi$ è :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0$$

Per la seconda e terza componente di $\operatorname{rot} \nabla \varphi$ si procede in modo analogo.

■

Segue che: per ogni campo vettoriale $\Omega \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}^3$ di classe C^1 su Ω ,

\mathbf{F} è conservativo ($\mathbf{F} = \nabla \varphi$) \Rightarrow \mathbf{F} è irrotazionale.

5 Teorema di Green

Teorema 5.1 (di Green.). *Sia $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ una regione del piano, il cui bordo $\partial\mathcal{R} = C$ sia una curva chiusa semplice (cioè che non interseca se stessa), orientata “in senso anti-orario”.*

$\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vettoriale (liscio) in \mathcal{R} . Allora

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

5.1 Alcune esercizi che utilizzano il teorema di Green

Esercizio 5.2. *Utilizzando il teorema di Green, dimostrare che*

$$\text{area di } R = \int_C x dy = - \int_C y dx = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

Esercizio 5.3. *Usando il risultato precedente, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Esercizio 5.4. *Calcolare l'integrale $\int_C (x^4 dx + xy dy)$, dove C è il bordo del triangolo T di vertici $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$, orientato da A a B a C . (Usare il teorema di Green.)*

Esercizio 5.5. *Sia C il bordo della regione piana delimitata dalle curve aventi equazioni cartesiane: $x = y^2, y = 1, x^2 + y^2 = 5, y = 0$ ($x, y \geq 0$). Determinare il lavoro compiuto dalla forza*

$$F(x, y) = xy\mathbf{i} + x^4y\mathbf{j}$$

lungo la curva chiusa C percorsa in senso antiorario.

Esercizio 5.6. *Sia C il bordo della regione piana delimitata dalle curve aventi equazioni cartesiane: $x^2 + y^2 = 1, x = 1, y = x^2 + 1, (x, y \geq 0)$. Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il lavoro compiuto dalla forza*

$$F(x, y) = x^2y^2\mathbf{i} + ax\mathbf{j}$$

lungo la curva chiusa C percorsa in senso antiorario

5.2 Risposte.

Esercizio 5.2 Per il teorema di Green,

$$\int_C xdy = \int_C 0dx + xdy = \iint_R 1dxdy = \text{area di } R$$

Analogamente:

$$\int_C (-ydx) = \int_C (-ydx + 0dy) = \iint_R 1dxdy = \text{area di } R$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze $\int_C xdy = \text{area di } R$ e $\int_C (-ydx) = \text{area di } R$, si ottiene

$$\text{area di } R = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$$

Esercizio 5.3 Una parametrizzazione dell'ellisse è : $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Per il teorema di Green, l'area della regione racchiusa dall'ellisse è

$$\frac{1}{2} \int_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab$$

Oppure:

$$\int_C xdy = \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)dt = ab \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 dt = \pi ab$$

Esercizio 5.4 Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x^4, xy)$. Per il teorema di Green, abbiamo:

$$\int_C (x^4 dx + xy dy) = \iint_T y dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y dy \right) dx = \frac{1}{6}$$

Esercizio 5.5 $L = \frac{47}{6}$.

Esercizio 5.6 $L = a \left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{26}{35}$.

6 Equazioni di Maxwell: dalla forma integrale a quella differenziale

La prima equazione di Maxwell afferma che il flusso di \mathbf{E} uscente dalla superficie S (orientata e chiusa) è pari alla somma algebrica delle cariche racchiuse in S diviso per ε_0 : $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$. Indicato con V il volume racchiuso da S e con $\rho = \frac{dq}{dV}$ la densità volumetrica di carica, si ottiene:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (6.1)$$

Applicando il teorema della divergenza all'integrale di superficie si ottiene:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.3)$$

L'uguaglianza (6.3) costituisce la *prima equazione di Maxwell in forma differenziale*.

La seconda equazione di Maxwell afferma che il flusso di \mathbf{B} uscente da qualsiasi superficie S (orientata e chiusa) è pari a zero: $\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. Utilizzando ancora il teorema della divergenza si ottiene immediatamente:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0 \quad (6.4)$$

ossia, la *seconda equazione di Maxwell in forma differenziale*.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6.5)$$

La legge di Faraday afferma che la circuitazione di \mathbf{E} lungo una curva γ , chiusa e orientata, è uguale all'opposto della variazione di flusso $\Phi(\mathbf{B})$, rispetto al tempo, attraverso una qualsiasi superficie S avente per bordo γ :

$$\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{B}) = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.6)$$

Applicando l'integrale di Stokes all'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ si ottiene

$$\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.7)$$

Quindi dalla (6.6) si ricava:

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= -\int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS
\end{aligned}
\tag{6.8}$$

Per l'arbitrarietà di S ,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
\tag{6.9}$$

La (6.9) costituisce *terza equazione di Maxwell in forma differenziale*.

La quarta equazione di Maxwell in forma integrale è :

$$\int_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\mathbf{E}}}{dt} \right)
\tag{6.10}$$

Il teorema di Stokes consente di scrivere la circuitazione di \mathbf{B} in termini di rotore del campo magnetico: $\int_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$, dove S è una superficie orientata di bordo γ . Inoltre, indicata con \mathbf{J} la densità di corrente, si ha: $i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS &= \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \right) \\
&= \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \right) \\
&= \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS
\end{aligned}
\tag{6.11}$$

Poichè S è una superficie arbitraria,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)
\tag{6.12}$$

La (6.12) è la quarta equazione di Maxwell in forma differenziale.

Riassumendo, le quattro equazioni di Maxwell in forma differenziale sono

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.13}$$

Queste equazioni di straordinaria bellezza costituiscono l'essenza dell'elettromagnetismo, nel senso che ogni fenomeno elettromagnetico può essere dedotto da esse. Una delle conseguenze più sorprendenti è

$$c^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

dove $c = 2,99 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce nel vuoto.

7 Esercizi di analisi vettoriale

Esercizio 7.1. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

1. Trovare una parametrizzazione di S : $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.
2. Per ogni $p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ di S , trovare il vettore normale unitario $\mathbf{N}_p = (N_1(u, v), N_2(u, v), N_3(u, v))$ che punta verso l'esterno di S .
3. Trovare l'elemento di area $dS = g(u, v)du dv$ della superficie parametrizzata S .
4. Trovare l'area di S calcolando un integrale di superficie.
5. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, x + y, 0)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, uscente dalla superficie S .
6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S f dS$.

Esercizio 7.2. Usando il teorema della divergenza, calcolare

$$\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$$

dove S è la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Esercizio 7.3. Sia $S = \partial B$ il bordo della regione solida B compresa tra il paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ e sia \mathbf{F} il campo vettoriale $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$. Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso di \mathbf{F} uscente dalla superficie S .

Esercizio 7.4. Trovare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ attraverso la sfera S di centro l'origine e raggio a . Orientare la sfera con il vettore normale unitario \mathbf{N} che punta verso l'esterno.

Esercizio 7.5. Trovare il flusso di $\mathbf{F} = \mathbf{k}$ attraverso il cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientato con il vettore normale \mathbf{N} che punta verso l'esterno.

Esercizio 7.6. Calcolare il flusso di $\mathbf{F} = \mathbf{i}$ attraverso la porzione S del piano $x + y + z = 1$ che si trova nel primo ottante. Si fissi \mathbf{N} in modo che punti lontano dall'origine.

Esercizio 7.7. Trovare l'elemento di area dS della superficie sferica S di equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(\varphi, \vartheta) &= a \sin \varphi \cos \theta \\y(\varphi, \vartheta) &= a \sin \varphi \sin \theta \\z(\varphi, \vartheta) &= a \cos \varphi\end{aligned}\tag{7.1}$$

$a > 0$ fissato, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Calcolare l'area della sfera.

Esercizio 7.8. Calcolare il flusso di $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$ attraverso la semisfera

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$$

Si fissi il vettore unitario di orientazione \mathbf{N} in modo che punti lontano dall'origine.

Esercizio 7.9. Trovare l'elemento di area dS della superficie S (cilindro) di equazioni parametriche

$$x(t, u) = a \cos t \quad y(t, u) = a \sin t \quad z(t, u) = u$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.10. Trovare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ attraverso il tetraedro T i cui vertici sono l'origine e i tre punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. (Si orientino le facce del tetraedro con la normale esterna).

Esercizio 7.11. Sia $[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ l'elica di equazioni parametriche $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Calcolare l'integrale

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}\tag{7.2}$$

dove $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

In termini equivalenti, calcolare l'integrale

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\tag{7.3}$$

sulla curva C della forme differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Esercizio 7.12. Sia \vec{F} un campo vettoriale piano costante (cioè del tipo $\vec{F} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) e sia $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1 . Dimostrare che

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0\tag{7.4}$$

Esercizio 7.13. Il campo vettoriale $\vec{F} = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ è il rotore di un altro campo vettoriale?

Esercizio 7.14. Sia \vec{F} un campo vettoriale di classe $C^1(U)$, U aperto di \mathbb{R}^3 , e sia S una superficie chiusa tutta contenuta in U . Dimostrare che

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (7.5)$$

Lo si dimostri in due modi: a) usando il teorema della divergenza; b) usando il teorema del rotore.

Esercizio 7.15. Dimostrare che per ogni superficie chiusa S contenuta in U e per ogni funzione armonica f in U ,

$$\int_S \nabla f \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (7.6)$$

Esercizio 7.16. Sia

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^n}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che l'unico n per il quale $\text{div } \mathbf{F} = 0$ è $n = 3$. (Ad esempio, è il caso del campo gravitazionale o del campo elettrico).

Esercizio 7.17. Sia S la superficie costituita dalla semisfera superiore S_1 di centro l'origine e raggio a e dal disco S_2 , sul piano x, y , di centro l'origine e raggio a . Sia $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verificare il teorema della divergenza. (Cioè, calcolare l'integrale della divergenza e il flusso, e verificare che sono uguali).

Esercizio 7.18. Siano S_1, S_2 due superfici chiuse. Supponiamo che S_2 sia tutta contenuta all'interno di S_1 e sia V la regione di spazio compresa tra di esse. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale tale che $\text{div } \mathbf{F} = 0$ in V . Fissiamo su S_1 e su S_2 l'orientazione \mathbf{n} uscente. Dimostrare che

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.7)$$

Esercizio 7.19. Sia \mathbf{F} il campo vettoriale radiale che in ogni punto $P = (x, y, z)$ punta lontano dall'origine, con intensità $\frac{1}{r^2}$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Determinare il dominio D di \mathbf{F} . D è connesso? è semplicemente connesso?
2. \mathbf{F} è solenoidale? è irrotazionale? è conservativo?
3. Calcolare il flusso di \mathbf{F} attraverso la sfera di centro l'origine e raggio a . Il fatto che tale flusso non sia nullo, contraddice il teorema della divergenza? Spiegare.

4. Dimostrare che il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa, orientata con la normale uscente, vale zero se la superficie non contiene l'origine al suo interno, mentre vale 4π se la contiene.
5. Determinare il lavoro compiuto da \mathbf{F} lungo la curva $C = C_1 \cup C_2$ percorsa in senso antiorario a partire da $(1, 0, 1)$, dove C_1, C_2 sono gli archi di parabola contenuti nel piano $z = 1$ di equazioni $y = 1 - x^2$ e $y = -1 + x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$).
6. Dimostrare che non esiste alcun campo vettoriale \mathbf{G} in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ tale che $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Esercizio 7.20. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. (Vale a dire, le componenti di \mathbf{F} hanno tutte le derivate parziali e queste sono continue). Dimostrare che le due condizioni seguenti sono equivalenti:

1. Per ogni superficie chiusa S , si ha $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$
2. $\text{div } \mathbf{F} = 0$

7.1 Soluzioni.

Esercizio 7.1

1. $x = R \cos u, y = R \sin u, z = v, (u, v) \in D = [0, 2\pi] \times [0, h].$

2. $\mathbf{N}_p = (\cos u, \sin u, 0).$

3. $dS = g(u, v) du dv = R du dv$

4. $\int_0^{2\pi} du \int_0^h R dv = 2\pi R h$

5.

$$\begin{aligned} & \int_D (R \cos u + R \sin u, R \cos u + R \sin u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 0) R du dv \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^h R^2 (1 + 2 \sin u \cos u) dv \\ &= 2\pi R^2 h \end{aligned}$$

6.

$$\iint_S f dS = \int_D R^2 R du dv = 2\pi R^3 h$$

Esercizio 7.2 La funzione integranda si può scrivere $2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$, dove $\mathbf{F} = (2, 2, z)$ e $\mathbf{N} = (x, y, z)$ è il vettore unitario normale alla sfera, orientato verso l'esterno. Allora l'integrale superficiale è il flusso di \mathbf{F} attraverso la sfera e, per il teorema della divergenza,

$$\iint_S (2x + 2y + z^2) dS = \iiint_V 1 dV = \frac{4}{3}\pi$$

Esercizio 7.3 $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int_B \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_B 4 dV = 4 \operatorname{volume}(B) = 4 \int_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$, dove D è il disco unitario. Il flusso vale 2π .

Esercizio 7.4 Il campo vettoriale unitario \mathbf{n} normale alla sfera è

$$\frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Si ha $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{a}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{a}a^2 = a$. Quindi

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S a dS = a \int_S dS = a(\operatorname{area} S) = a4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

Esercizio 7.5 Il campo \mathbf{k} è sempre tangente alla superficie del cilindro. Quindi il flusso è nullo.

Esercizio 7.6 Si ha $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La regione S è un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$. La sua area è $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Il flusso è

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \text{ area}(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 7.7 Posto

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = (x(\varphi, \vartheta), y(\varphi, \vartheta), z(\varphi, \vartheta))$$

si ha

$$dS = |\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta| d\varphi d\vartheta$$

Facendo i conti, si ottiene $dS = a^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta$. Arrivare allo stesso risultato ragionando su una figura.

L'area della sfera è

$$\int_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta = 4\pi a^2$$

Esercizio 7.8 $\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$; $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{y^2}{a}$. Facciamo il conto usando le coordinate sferiche φ, ϑ . Si ha $y = a \sin \varphi \sin \vartheta$; l'elemento d'area è $dS = a^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta$. Il flusso è

$$\begin{aligned} \int_S \frac{y^2}{a} dS &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a^4 \sin^3 \varphi \sin^2 \vartheta d\varphi d\vartheta & (7.8) \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \\ &= a^3 \left[-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

Esercizio 7.9 L'elemento di area è $dS = a d\vartheta dz$. (Ragionare anche sulla figura).

Esercizio 7.10 Convien usare il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV \quad (7.9)$$

dove $T = \partial V$ è il tetraedro e V è la regione di spazio racchiusa da T . Si ha $\text{div } \mathbf{F} = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \text{div } \mathbf{F} dV \\ &= \int_V dV \\ &= \text{volume}(V) \\ &= \frac{1}{3}(\text{base})(\text{altezza}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 7.11

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2\end{aligned}$$

Esercizio 7.12 Se $C(t) = (x(t), y(t))$,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b [\alpha x'(t) + \beta y'(t)] dt \\ &= \left[\alpha x(t) + \beta y(t) \right]_a^b = (\alpha x(b) + \beta y(b)) - (\alpha x(a) + \beta y(a)) \\ &= \alpha(x(b) - x(a)) + \beta(y(b) - y(a)) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

perché $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, in quanto per ipotesi C è chiusa.**Esercizio 7.13** Supponiamo che esista un campo vettoriale \vec{G} tale che $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$. Allora $\text{div } \vec{F} = \text{div } \text{rot } \vec{G} = 0$ (perché $\text{div } \text{rot} = 0$). Invece $\text{div } \vec{F} = 3$. Quindi \vec{F} non è rotore di alcun campo vettoriale.**Esercizio 7.14**a) Si ricordi che $\text{div } \text{rot } \vec{F} = 0$ per ogni \vec{F} . Pertanto, detto V il volume racchiuso dalla superficie chiusa S , si ha $S = \partial V$ e, per il teorema della divergenza,

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div}(\text{rot } \vec{F}) dV = \int_V 0 dV = 0 \quad (7.10)$$

b) Poiché S è una superficie chiusa, si ha $\partial S = \emptyset$. Per il teorema del rotore,

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\emptyset} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.11)$$

Oppure, tracciamo sulla superficie S una curva chiusa C che divida S in due superfici S_1 , S_2 . Se si orienta C compatibilmente con S_1 , allora la curva $-C$ sarà il bordo orientato di S_2 . Applicando il teorema del rotore, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dl \\ \int_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Esercizio 7.15 Sia V la regione di spazio racchiusa da S . Per il teorema della divergenza,

$$\int_S \nabla f \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\nabla f) dV = 0 \quad (7.12)$$

perché per ipotesi f è armonica, cioè soddisfa $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.

Esercizio 7.16 La prima componente di \mathbf{F} è $F_1 = r^{-n}x$. La derivata parziale di r rispetto a x vale $\frac{x}{r}$. Usando le regole di derivazione (del prodotto e della funzione composta), si ha:

$$D_1 F_1 = D_1(r^{-n}x) = -nr^{-n-1}\frac{x}{r}x + r^{-n}$$

Non c'è bisogno di calcolare le altre derivate parziali $D_2 F_2$ e $D_3 F_3$. Infatti, per simmetria, si ottiene:

$$D_2 F_2 = D_2(r^{-n}y) = -nr^{-n-1}\frac{y}{r}y + r^{-n} \quad (7.13)$$

$$D_3 F_3 = D_3(r^{-n}z) = -nr^{-n-1}\frac{z}{r}z + r^{-n} \quad (7.14)$$

Sommando membro a membro,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3 = r^{-n}(-n + 3) \quad (7.15)$$

che si annulla identicamente solo se $n = 3$.

Esercizio 7.17 Orientiamo S con la normale uscente. Sia V la figura solida (semisfera piena) della quale S è il bordo.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = 3 \operatorname{vol}(V) = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3.$$

Il flusso di \mathbf{F} sul disco di base S_2 è nullo, perché \mathbf{F} è tangente a tale disco. Il flusso di \mathbf{F} attraverso la semisfera S_1 è

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_1} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} dS \\ &= \int_{S_1} a^2 \frac{1}{a} dS \\ &= a \cdot \operatorname{area}(S_1) = a2\pi a^2 = 2\pi a^3 \end{aligned} \quad (7.16)$$

L'integrale della divergenza e il flusso valgono entrambi $2\pi a^3$.

Esercizio 7.18 Denotiamo con S_2^- la superficie S_2 orientata con la normale entrante. Allora, per il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

Esercizio 7.19

1. Il dominio D di \mathbf{F} è $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. D è connesso e semplicemente connesso.
2. Si è già dimostrato in 7.16 che $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, quindi \mathbf{F} è solenoidale. Utilizzando la definizione di rotore si ricava $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Pertanto \mathbf{F} è un campo irrotazionale definito su un dominio semplicemente connesso, di conseguenza è conservativo.
3. Sulla superficie della sfera di centro l'origine e raggio a , la componente normale di \mathbf{F} vale $\frac{1}{a^2}$. Quindi il flusso attraverso tale sfera vale $\frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi$.
4. Se S è una superficie che non contiene l'origine al suo interno, si può applicare il teorema della divergenza e si ottiene subito $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$. Se invece S contiene l'origine nel suo interno, sia S_1 una sfera di centro l'origine e di raggio abbastanza grande da contenere tutta la superficie S al suo interno. Allora, per l'esercizio 7.18,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi$$

5. La curva C è chiusa e il campo \mathbf{F} è conservativo, quindi il lavoro compiuto da \mathbf{F} lungo C è nullo.
6. Dimostriamo infine che non esiste alcun \mathbf{G} tale che $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Supponiamo, per assurdo, che un tale \mathbf{G} esista. Sia S una sfera centrata in 0 e sia C un sua circonferenza di raggio massimo. Chiamiamo S_1 e S_2 le due superfici semisferiche in cui C divide S . Si noti che C è bordo sia di S_1 che di S_2 , ma l'orientazione indotta su C da S_1 è opposta rispetto all'orientazione indotta su C da S_2 . Applicando il teorema del rotore, e tenendo conto delle orientazioni sul bordo, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dl \\ \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dl \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, si ottiene

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

Assurdo, perché si è visto che tale integrale vale 4π .

Esercizio 7.20 L'implicazione

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \longrightarrow \quad \forall S \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

segue subito dal teorema della divergenza.

Dimostriamo l'implicazione inversa:

$$\forall S \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

Per assurdo, supponiamo che esista un punto P_0 in cui $(\operatorname{div} \mathbf{F})(P_0)$ non sia zero; ad esempio, sia $(\operatorname{div} \mathbf{F})(P_0) > 0$. Per continuità, esiste una sfera aperta W , centrata in P_0 , tale che $(\operatorname{div} \mathbf{F})(P) > 0$ per ogni punto P in W . Ma allora, detta $S = \partial W$ la superficie sferica che è bordo di W , per il teorema della divergenza si ha

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_W \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV > 0$$

L'ultima disuguaglianza contraddice l'ipotesi che per ogni superficie S si abbia $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$.