Flusso, divergenza e rotore.
Esercizi

Mauro Saita
maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Giugno 2016.[1]

Indice

1 Teorema della divergenza (di Gauss). **2**
1.1 Flusso di un campo di forze attraverso un cubo di dimensioni infinitesime. . . 2
1.2 Interpretazione della divergenza come densità di flusso. 4
2 Analisi vettoriale **5**
3 Soluzioni. **9**

[1]Nome file: 'Es_flusso_divergenza_rotore_2016.tex'

1 Teorema della divergenza (di Gauss).

Queste note si ispirano a R. Feynman, *The Feynman Lectures on Phisics*, vol. II, Part 1, pp. 3-7; per maggiori chiarimenti si rimanda al testo.

1.1 Flusso di un campo di forze attraverso un cubo di dimensioni infinitesime.

Esercizio 1.1. *Si consideri in* $\mathbb{R}^3$ *un cubetto infinitesimo con gli spigoli paralleli agli assi coordinati e si orienti la superficie del cubetto con la normale uscente. Determinare il flusso del campo di forze* $\boldsymbol{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ *(di classe almeno* C^1*, definito su* $\mathbb{R}^3$*) uscente dalla superficie del cubetto.*

Il flusso totale uscente dalla superficie dS del cubetto infinitesimo è dato dalla somma dei flussi uscenti dalle tre coppie di facce opposte. Per questioni di simmetria si ha

$$\begin{aligned} \texttt{Flusso uscente dal cubetto} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &= \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove dV è il volume del cubetto.

Se Ω è un solido (compatto) di volume V delimitato da una superficie chiusa S, il flusso uscente da S è dato dalla somma dei flussi uscenti da tanti cubetti infinitesimi contenuti in Ω. Si ottiene

Teorema 1.2 (**della divergenza (di Gauss)**). *Sia Ω un solido compatto il cui bordo S è una superficie chiusa, orientata con la normale $\boldsymbol{n}$ uscente da S. Se $\Omega \xrightarrow{\boldsymbol{F}} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$ allora*

$$\textit{\texttt{Flusso uscente da}}\ S \quad = \quad \int_S \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{N} dS \quad = \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \tag{1.5}$$

Esercizio 1.3. *Si cosideri il campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$$

Determinare il flusso di F uscente dal bordo $\partial\Omega$ della regione solida delimitata dal cilindro $y^2+z^2=1$ e dai piani $x=-1$, $x=2$.

Soluzione. Si orienti S con il vettore normale $\mathbf{n}$ che punta verso l'esterno. Utilizzando il teorema della divergenza si ha

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_V 3y^2 + 3z^2 dV$$

In coordinate cilindriche ($x = x$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$) si ottiene:

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_V 3y^2+3z^2 dV = \int_{-1}^{2} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3r^3\, dr = \frac{9}{2}\pi$$

Esercizio 1.4. *Determinare il flusso del campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^3+yz, xz+y^3, xy+z^3+1)$$

uscente dal bordo $\partial\Omega$ del solido definito dalle seguenti disuguaglianze: $z^2-x^2-y^2 \geq 0$, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Soluzione. Per il teorema della divergenza si ha $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_V 3(x^2+y^2+z^2)dV$, dove V è il volume di Ω. In coordinate sferiche tale solido è individuato dalle seguenti disuguaglianze: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pertanto si ottiene $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_V 3(x^2+y^2+z^2)dV = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} d\,\theta \int_0^1 r^4\, dr = \frac{3}{10}(2-\sqrt{2})$.

1.2 Interpretazione della divergenza come densità di flusso.

Dall'uguaglianza (1.4) si ricava

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\texttt{Flusso uscente dal cubetto}}{\texttt{Volume del cubetto}} \tag{1.6}$$

Quindi la divergenza di $\mathbf{F}$ fornisce il flusso per unità di volume, cioè la *densità volumetrica di flusso*.

2 Analisi vettoriale

Esercizio 2.1. *Sia* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \le z \le h\}$.

1. *Trovare una parametrizzazione di* S*:* $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.
2. *Per ogni* $p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ *di* S*, trovare il vettore normale unitario* $\mathbf{N}_p = (N_1(u, v), N_2(u, v), N_3(u, v))$ *che punta verso l'esterno di* S.
3. *Trovare l'elemento di area* $dS = g(u, v)dudv$ *della superficie parametrizzata* S.
4. *Trovare l'area di* S *calcolando un integrale di superficie.*
5. *Calcolare il flusso del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, x + y, 0)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, uscente dalla superficie* S.
6. *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x, y, z) = x^2 + y^2$*. Calcolare l'integrale di superficie* $\displaystyle\iint_S f dS$.

Esercizio 2.2. *Usando il teorema della divergenza, calcolare*

$$\iint_{\mathcal{S}} (2x + 2y + z^2)\, dS$$

dove $\mathcal{S}$ *è la sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Esercizio 2.3. *Sia* $\mathcal{S} = \partial B$ *il bordo della regione solida* B *compresa tra il paraboloide* $z = 1 - x^2 - y^2$ *e il piano* $z = 0$ *e sia* $\mathbf{F}$ *il campo vettoriale* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definito da* $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$*. Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso di* $\mathbf{F}$ *uscente dalla superficie* $\mathcal{S}$.

Esercizio 2.4. *Trovare il flusso del campo vettoriale* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *attraverso la sfera* S *di centro l'origine e raggio* a*. Orientare la sfera con il vettore normale unitario* $\mathbf{N}$ *che punta verso l'esterno.*

Esercizio 2.5. *Trovare il flusso di* $\mathbf{F} = \mathbf{k}$ *attraverso il cilindro* $x^2 + y^2 = 1$*, orientato con il vettore normale* $\mathbf{N}$ *che punta verso l'esterno.*

Esercizio 2.6. *Calcolare il flusso di* $\mathbf{F} = \mathbf{i}$ *attraverso la porzione* S *del piano* $x + y + z = 1$ *che si trova nel primo ottante. Si fissi* $\mathbf{N}$ *in modo che punti lontano dall'origine.*

Esercizio 2.7. *Trovare l'elemento di area dS della superficie sferica S di equazioni parametriche*

$$\begin{aligned} x(\varphi, \vartheta) &= a \sin\varphi \cos\theta \\ y(\varphi, \vartheta) &= a \sin\varphi \sin\theta \\ z(\varphi, \vartheta) &= a \cos\varphi \end{aligned} \tag{2.1}$$

$a > 0$ *fissato,* $0 \leq \varphi \leq \pi$*,* $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$*. Calcolare l'area della sfera.*

Esercizio 2.8. *Calcolare il flusso di* $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$ *attraverso la semisfera*

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0\}$$

Si fissi il vettore unitario di orientazione $\mathbf{N}$ *in modo che punti lontano dall'origine.*

Esercizio 2.9. *Trovare l'elemento di area dS della superficie S (cilindro) di equazioni parametriche*

$$x(t, u) = a\cos t \qquad y(t, u) = a\sin t \qquad z(t, u) = u$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.10. *Trovare il flusso del campo vettoriale* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ *attraverso il tetraedro T i cui vertici sono l'origine e i tre punti* $(1, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$*. (Si orientino le facce del tetraedro con la normale esterna).*

Esercizio 2.11. *Sia* $[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *l'elica di equazioni parametriche* $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$*. Calcolare l'integrale*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{2.2}$$

dove $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

In termini equivalenti, calcolare l'integrale

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \tag{2.3}$$

sulla curva C della forme differenziale $\omega = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$*.*

Esercizio 2.12. *Sia $\vec{F}$ un campo vettoriale piano costante (cioè del tipo* $\vec{F} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}$*, con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*) e sia* $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2$ *una curva chiusa di classe C^1. Dimostrare che*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{2.4}$$

Esercizio 2.13. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che*

a) *per ogni campo scalare $\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω si ha:*

$$\text{rot}\nabla\varphi = 0$$

b) *per ogni campo vettoriale $\Omega \xrightarrow{\boldsymbol{F}} \mathbb{R}^3$ di classe C^1 su Ω si ha:*

$$\mathbf{F} \text{ è conservativo} \Rightarrow \mathbf{F} \text{ è irrotazionale.}$$

Esercizio 2.14. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che per ogni campo vettoriale $\Omega \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ di classe C^2 su Ω si ha:*

$$\text{div}\,\text{rot}\mathbf{F} = 0$$

Esercizio 2.15. *Il campo vettoriale $\vec{F} = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ è il rotore di un altro campo vettoriale?*

Esercizio 2.16. *Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale di classe $C^1(U)$, U aperto di $\mathbb{R}^3$, e sia S una superficie chiusa tutta contenuta in U. Dimostrare che*

$$\int_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{2.5}$$

Lo si dimostri in due modi: a) usando il teorema della divergenza; b) usando il teorema del rotore.

Esercizio 2.17. *Una funzione f di classe $C^2(U)$, U aperto di $\mathbb{R}^3$, si dice* armonica *se soddisfa l'equazione*

$$\text{div}\nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \tag{2.6}$$

detta equazione di Laplace. *Se si scrive $\nabla\cdot$ al posto di* div, *l'equazione di Laplace si scrive simbolicamente*

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0 \tag{2.7}$$

dove $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ è detto operatore di Laplace *o* laplaciano.

Posto $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, dimostrare che la funzione (di tre variabili) $\dfrac{1}{r}$ è armonica.

Esercizio 2.18. *Dimostrare che per ogni superficie chiusa S contenuta in U e per ogni funzione armonica f in U,*

$$\int_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{2.8}$$

Esercizio 2.19. *Sia*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^n}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $n \in \mathbb{R}$. *Dimostrare che l'unico n per il quale* $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ *è* $n = 3$. *(Ad esempio, è il caso del campo gravitazionale o del campo elettrico).*

Esercizio 2.20. *Sia S la superficie costituita dalla semisfera superiore S_1 di centro l'origine e raggio a e dal disco S_2, sul piano x, y, di centro l'origine e raggio a. Sia $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verificare il teorema della divergenza. (Cioè, calcolare l'integrale della divergenza e il flusso, e verificare che sono uguali).*

Esercizio 2.21. *Siano S_1, S_2 due superfici chiuse. Supponiamo che S_2 sia tutta contenuta all'interno di S_1 e sia V la regione di spazio compresa tra di esse. Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale tale che* $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ *in V. Fissiamo su S_1 e su S_2 l'orientazione $\mathbf{n}$ uscente. Dimostrare che*

$$\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{2.9}$$

Esercizio 2.22. *Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale radiale che in ogni punto $P = (x,y,z)$ punta lontano dall'origine, con intensità $\dfrac{1}{r^2}$, dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

1. *Determinare il dominio D di $\mathbf{F}$. D è connesso? è semplicemente connesso?*
2. *$\mathbf{F}$ è solenoidale? è irrotazionale? è conservativo?*
3. *Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la sfera di centro l'origine e raggio a. Il fatto che tale flusso non sia nullo, contraddice il teorema della divergenza? Spiegare.*
4. *Dimostrare che il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa, orientata con la normale uscente, vale zero se la superficie non contiene l'origine al suo interno, mentre vale 4π se la contiene.*
5. *Determinare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva $C = C_1 \cup C_2$ percorsa in senso antiorario a partire da $(1,0,1)$, dove C_1, C_2 sono gli archi di parabola contenuti nel piano $z = 1$ di equazioni $y = 1 - x^2$ e $y = -1 + x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$.*
6. *Dimostrare che non esiste alcun campo vettoriale $\mathbf{G}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ tale che* $\mathrm{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

Esercizio 2.23. *Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. (Vale a dire, le componenti di $\mathbf{F}$ hanno tutte le derivate parziali e queste sono continue). Dimostrare che le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Per ogni superficie chiusa S, si ha $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$*
2. $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$

3 Soluzioni.

Esercizio 2.1

1. $x = R\cos u, y = R\sin u, z = v$, $(u, v) \in D = [0, 2\pi] \times [0, h]$.
2. $\mathbf{N}_p = (\cos u, \sin u, 0)$.
3. $dS = g(u, v)dudv = Rdudv$
4. $\int_0^{2\pi} du \int_0^h Rdv = 2\pi Rh$
5. $$\begin{aligned} & \int_D (R\cos u + R\sin u, R\cos u + R\sin u, 0)\cdot(\cos u, \sin u, 0)Rdudv \\ = & \int_0^{2\pi} du \int_0^h R^2(1 + 2\sin u \cos u)dv \\ = & \ 2\pi R^2 h \end{aligned}$$
6. $$\iint_S f dS = \int_D R^2 Rdudv = 2\pi R^3 h$$

Esercizio 2.2 La funzione integranda si può scrivere $2x+2y+z^2 = (2, 2, z)\cdot(x, y, z) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$, dove $\mathbf{F} = (2, 2, z)$ e $\mathbf{N} = (x, y, z)$ è il vettore unitario normale alla sfera, orientato verso l'esterno. Allora l'integrale superficiale è il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la sfera e, per il teorema della divergenza,

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\, dS = \iiint_V 1\, dV = \frac{4}{3}\pi$$

Esercizio 2.3 $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} dS = \int_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_B 4\, dV = 4\, volume\, (B) = 4 \int_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$, dove D è il disco unitario. Il flusso vale 2π.

Esercizio 2.4 Il campo vettoriale unitario $\mathbf{n}$ normale alla sfera è

$$\frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Si ha $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{a}a^2 = a$. Quindi

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_S a\, dS = a \int_S dS = a(area\ S) = a4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

Esercizio 2.5 Il campo $\mathbf{k}$ è sempre tangente alla superficie del cilindro. Quindi il flusso è nullo.

Esercizio 2.6 Si ha $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ e $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La regione S è un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$. La sua area è $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Il flusso è

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ area\,(S) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2.7 Posto

$$\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = (x(\varphi,\vartheta), y(\varphi,\vartheta), z(\varphi,\vartheta))$$

si ha

$$dS = |\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\varphi|\ d\varphi\, d\vartheta$$

Facendo i conti, si ottiene $dS = a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$ (arrivare allo stesso risultato ragionando su una figura). L'area della sfera è

$$\int_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta = 4\pi a^2$$

Esercizio 2.8 $\quad \mathbf{n} = \dfrac{1}{a}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k});\quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \dfrac{y^2}{a}$. Facciamo il conto usando le coordinate sferiche φ,ϑ. Si ha $y = a\sin\varphi\,\sin\vartheta$; l'elemento d'area è $dS = a^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\vartheta$. Il flusso è

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{y^2}{a}\,dS &= \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} a^4 \sin^3\varphi \sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta \qquad (3.1)\\
&= a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\\
&= a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\\
&= a^3\Big[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\pi/2}\Big[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\Big]_0^{2\pi}\\
&= \frac{2}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

Esercizio 2.9 L'elemento di area è $dS = a\,d\vartheta\,dz$. (Ragionare anche sulla figura).

Esercizio 2.10 Conviene usare il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV \qquad (3.2)$$

dove $T = \partial V$ è il tetraedro e V è la regione di spazio racchiusa da T. Si ha $\mathrm{div}\mathbf{F} = 1$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV\\
&= \int_V dV\\
&= \texttt{volume}\,(V)\\
&= \frac{1}{3}\texttt{(base)(altezza)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.11

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k})\cdot(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k})\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + \sin t\cos t + t)\,dt = \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2\end{aligned}$$

Esercizio 2.12 Se $C(t) = (x(t), y(t),$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_a^b [\alpha\,x'(t) + \beta\,y'(t)]\,dt \\ &= \Big[\alpha\,x(t) + \beta\,y(t)\Big]_a^b = (\alpha\,x(b) + \beta y(b)) - (\alpha\,x(a) + \beta y(a)) \\ &= \alpha(x(b) - x(a)) + \beta(y(b) - y(a)) \\ &= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

perché $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, in quanto per ipotesi C è chiusa.

Esercizio 2.13 $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$. La prima componente di $\text{rot}\nabla\varphi$ è :

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} = 0$$

Per la seconda e terza componente di $\text{rot}\nabla\varphi$ si procede in modo analogo.

Quindi, ogni campo vettoriale $\mathbf{F}$ conservativo ($\mathbf{F} = \nabla\varphi$) è irrotazionale.

Esercizio 2.14 $\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\text{div}\,\text{rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

Quindi, il rotore di un qualunque campo vettoriale è solenoidale.

Esercizio 2.15 Se esistesse un campo vettoriale $\mathbf{G}$ tale che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ si avrebbe $\text{div}\mathbf{F} = \text{div}\,\text{rot}\mathbf{G} = 0$ (perché $\text{div}\,\text{rot} = 0$). Invece $\text{div}\mathbf{F} = 3$. Quindi $\mathbf{F}$ non è rotore di alcun campo vettoriale.

Esercizio 2.16

a) Si ricordi che $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ per ogni $\mathbf{F}$. Pertanto, detto V il volume racchiuso dalla superficie chiusa S, si ha $S = \partial V$ e, per il teorema della divergenza,

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})\,dV = \int_V 0\,dV = 0 \tag{3.3}$$

b) Poiché S è una superficie chiusa, si ha $\partial S = \emptyset$. Per il teorema del rotore,

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\emptyset} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{3.4}$$

Oppure, si tracci sulla superficie S una curva chiusa C che divida S in due superfici S_1, S_2. Se si orienta C compatibilmente con S_1, allora la curva $-C$ sarà il bordo orientato di S_2. Applicando il teorema del rotore si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS &= \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dl\\ \int_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS &= \int_{-C} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = -\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{S_1} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS + \int_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS = 0$$

Esercizio 2.18 Sia V la regione di spazio racchiusa da S. Per il teorema della divergenza,

$$\int_S \nabla f\cdot\,\mathbf{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}(\nabla f)\,dV = 0 \tag{3.5}$$

perché per ipotesi f è armonica, cioè soddisfa $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.

Esercizio 2.19 La prima componente di $\mathbf{F}$ è $F_1 = r^{-n}x$. La derivata parziale di r rispetto a x vale $\dfrac{x}{r}$. Usando le regole di derivazione (del prodotto e della funzione composta), si ha:

$$D_1F_1 = D_1(r^{-n}x) = -nr^{-n-1}\frac{x}{r}x + r^{-n}$$

Non c'è bisogno di calcolare le altre derivate parziali D_2F_2 e D_3F_3. Infatti, per simmetria, si ottiene:

$$D_2F_2 = D_2(r^{-n}y) = -nr^{-n-1}\frac{y}{r}y + r^{-n} \tag{3.6}$$

$$D_3F_3 = D_3(r^{-n}z) = -nr^{-n-1}\frac{z}{r}z + r^{-n} \tag{3.7}$$

Sommando membro a membro,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3 = r^{-n}(-n+3) \tag{3.8}$$

che si annulla identicamente solo se $n = 3$.

Esercizio 2.20 Si orienti S con la normale uscente. Sia V la figura solida (semisfera piena) della quale S è il bordo.

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 3\, vol\,(V) = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3.$$

Il flusso di $\mathbf{F}$ sul disco di base S_2 è nullo, perché $\mathbf{F}$ è tangente a tale disco. Il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la semisfera S_1 è

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \int_{S_1} (x,y,z)\cdot\frac{(x,y,z)}{a}\, dS \\ &= \int_{S_1} a^2\frac{1}{a}\, dS \\ &= a\cdot area(S_1) = a2\pi a^2 = 2\pi a^3 \end{aligned} \tag{3.9}$$

L'integrale della divergenza e il flusso valgono entrambi $2\pi a^3$.

Esercizio 2.21 Si denoti con S_2^- la superficie S_2 orientata con la normale entrante. Allora, per il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} 0 = \int_V \operatorname{div}\mathbf{F}\ dV &= \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS + \int_{S_2^-} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS - \int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS \end{aligned}$$

Esercizio 2.22

1. Il dominio D di $\mathbf{F}$ è $\mathbb{R}^3\setminus 0$. D è connesso e semplicemente connesso.

2. Si è già dimostrato in 2.19 che $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, quindi $\mathbf{F}$ è solenoidale. Utilizzando la definizione di rotore si ricava $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$. Pertanto $\mathbf{F}$ è un campo irrotazionale definito su un dominio semplicemente connesso, di conseguenza è conservativo.

3. Sulla superficie della sfera di centro l'origine e raggio a, la componente normale di $\mathbf{F}$ vale $\dfrac{1}{a^2}$. Quindi il flusso attraverso tale sfera vale $\dfrac{1}{a^2}\,4\pi a^2 = 4\pi$.

4. Se S è una superficie che non contiene l'origine al suo interno, si può applicare il teorema della divergenza e si ottiene subito $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS = 0$. Se invece S contiene l'origine nel suo interno, sia S_1 una sfera di centro l'origine e di raggio abbastanza grande da contenere tutta la superficie S al suo interno. Allora, per l'esercizio 2.21,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS = \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS = 4\pi$$

5. La curva C è chiusa e il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, quindi il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo C è nullo.

6. Si tratta didimostrare che non esiste alcun $\mathbf{G}$ tale che $\text{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Si supponga, per assurdo, che un tale $\mathbf{G}$ esista. Sia S una sfera centrata in 0 e sia C un sua circonferenza di raggio massimo. Chiamiamo S_1 e S_2 le due superfici semisferiche in cui C divide S. Si noti che C è bordo sia di S_1 che di S_2, ma l'orientazione indotta su C da S_1 è opposta rispetto all'orientazione indotta su C da S_2. Applicando il teorema del rotore, tenendo conto delle orientazioni sul bordo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_{S_1} \text{rot}\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dl \\ \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_{S_2} \text{rot}\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dl \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, si ricava

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Assurdo, perché si è visto che tale integrale vale 4π.

Esercizio 2.23 L'implicazione

$$\text{div}\mathbf{F} = 0 \quad \longrightarrow \quad \forall S \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

segue subito dal teorema della divergenza.

Resta da dimostrare l'implicazione inversa:

$$\forall S \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{div}\mathbf{F} = 0$$

Per assurdo, si supponga che esista un punto P_0 in cui $(\text{div}\mathbf{F})(P_0)$ non sia zero; ad esempio, sia $(\text{div}\mathbf{F})(P_0) > 0$. Per continuità, esiste una sfera aperta W, centrata in P_0, tale che $(\text{div}\mathbf{F})(P) > 0$ per ogni punto P in W. Ma allora, detta $S = \partial W$ la superficie sferica che è bordo di W, per il teorema della divergenza si ha

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_W \text{div}\mathbf{F}\, dV > 0$$

L'ultima disuguaglianza contraddice l'ipotesi che per ogni superficie S si abbia $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.