Integrali multipli
Esercizi

Mauro Saita
maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Giugno 2016.[1]

Indice

[1]Nome file: 'Es_integrali_multipli_2016.tex'

1 Integrali doppi

Esercizio 1.1. *Trovare il volume V della figura racchiusa tra il piano $z = 8x + 6y$ e il rettangolo $R = [0, 1] \times [0, 2]$.*

Soluzione. Si osservi che $f(x, y) = 8x + 6y \geq 0$ per $(x, y) \in R$. Dunque:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^1 (8x + 6y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 + 6xy \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_0^2 (4 + 6y)\, dy \\ &= 4y + 3y^2 \Big|_0^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Se avessimo scambiato l'ordine di integrazione, avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^2 (8x + 6y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(8xy + 3y^2 \Big|_{y=0}^{y=2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (16x + 12)\, dx \\ &= 8x^2 + 12x \Big|_0^1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Esercizio 1.2. *Calcolare il volume V della figura limitata al di sopra dal grafico della funzione $z = e^{x+y}$ e al di sotto dal rettangolo $R = [2, 3] \times [1, 2]$.*

Soluzione. Si noti che $f(x, y) = e^{x+y} > 0$ per ogni (x, y). Allora si ha:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_2^3 e^{x+y}\, dx\, dy \\ &= \int_1^2 \left(e^{x+y} \Big|_{x=2}^{x=3} \right) dy \\ &= \int_1^2 (e^{y+3} - e^{y+2})\, dy \\ &= e^{y+3} - e^{y+2} \Big|_1^2 \\ &= e^5 - e^4 - (e^4 - e^3) = e^5 - 2e^4 + e^3 \end{aligned}$$

Esercizio 1.3. *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x + y)\, dx\, dy.$

Soluzione. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(-\cos(x+y)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}(-\cos(y+\pi)+\cos y)\,dy \\
&= -\sin(y+\pi)+\sin y\,\Big|_0^{2\pi} = -\sin 3\pi+\sin 2\pi-(-\sin\pi+\sin 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_R (8x+6y)\,dA$$

dove $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x^2\}$

Soluzione. La regione R è mostrata nella figura a fianco. Sezionando il dominio R con linee verticali, otteniamo:

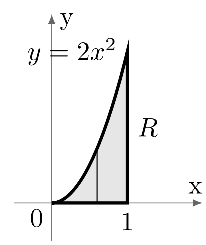


Figura 1

$$\begin{aligned}
V &= \iint_R (8x+6y)\,dA \\
&= \int_0^1\left[\int_0^{2x^2}(8x+6y)\,dy\right]\,dx \\
&= \int_0^1\left(8xy+3y^2\Big|_{y=0}^{y=2x^2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1(16x^3+12x^4)\,dx \\
&= 4x^4+\tfrac{12}{5}x^5\,\Big|_0^1 = 4+\tfrac{12}{5}=\tfrac{32}{5}=6.4
\end{aligned}$$

Sezionando invece con linee orizzontali, si ha:

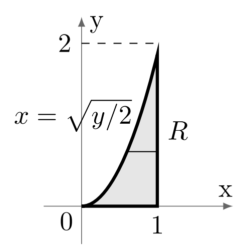
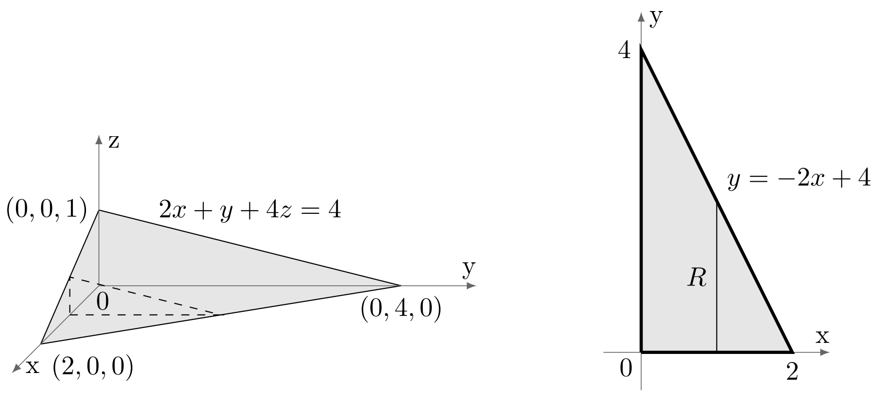


Figura 2

$$\begin{aligned}
V &= \iint_R (8x+6y)\,dA \\
&= \int_0^2\left[\int_{\sqrt{y/2}}^1(8x+6y)\,dx\right]\,dy \\
&= \int_0^2\left(4x^2+6xy\Big|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=1}\right)\,dy \\
&= \int_0^2(4+6y-(2y+\tfrac{6}{\sqrt{2}}y\sqrt{y}\,))\,dy = \int_0^2(4+4y-3\sqrt{2}y^{3/2})\,dy \\
&= 4y+2y^2-\tfrac{6\sqrt{2}}{5}y^{5/2}\,\Big|_0^2 = 8+8-\tfrac{6\sqrt{2}\sqrt{32}}{5} = 16-\tfrac{48}{5}=\tfrac{32}{5}=6.4
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5. *Trovare il volume del solido V delimitato dai tre piani coordinati e dal piano di equazione $2x + y + 4z = 4$.*

Soluzione: Il solido è mostrato nella figura 3(a), insieme a una sua sezione verticale.



(a) **(b)**

Figura 3

Il volume V è dato da $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$, dove $f(x,y) = z = \frac{1}{4}(4-2x-y)$ e la regione R, mostrata nella figura 3(b), è $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -2x+4\}$. Usando sezioni verticali di R si ha

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_R \tfrac{1}{4}(4-2x-y)\,dA \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{-2x+4} \tfrac{1}{4}(4-2x-y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{8}(4-2x-y)^2 \Big|_{y=0}^{y=-2x+4}\right) dx \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{8}(4-2x)^2\,dx \\
&= -\tfrac{1}{48}(4-2x)^3 \Big|_0^2 = \tfrac{64}{48} = \tfrac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.6. *Calcolare la massa totale della regione*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi,\, 0 \le y \le \sin x\}$$

nell'ipotesi che la densità (superficiale) di massa $\delta(x,y)$ sia proporzionale alla distanza dall'asse delle x.

Soluzione. La nostra ipotesi è che si abbia $\delta(x,y) = ky$, con k costante positiva. Allora la massa totale sarà data dall'integrale doppio

$$\iint\limits_D ky\,dxdy$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left[\int_0^{\sin x} y\,dy\right] dx &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sin x}\right) dx \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sin x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Quindi la massa totale è $k\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 1.7. *Calcolare i seguenti integrali*

1. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$ *con* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$.
2. $\iint_D (x+\sin y)\,dxdy$ *dove* $D = [-1,1] \times [-1,1]$
3. $\iint_D (x\sin y)\,dxdy$ *dove* $D = [0,1] \times [0,\pi]$
4. $\iint_D \sin y^3\,dxdy$ *dove* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad \sqrt{x} \le y \le 1\}$
5. $\iint_D y\,dxdy$ *dove* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 2x^2 \le y \le 2\}$

Esercizio 1.8. *Calcolare il volume del solido*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4-x-y\}.$$

Esercizio 1.9. *Calcolare l'integrale* $\iint_T xy\,dxdy$*, dove* T *è il triangolo di vertici* $(0,0),(1,0),(1,1)$.

Esercizio 1.10. *Calcolare l'integrale* $\iint_D x\,dxdy$*, dove* D *è la regione delimitata dai grafici delle funzioni* $y = x^2+1$ *e* $y = 2x^2$, $-1 \le x \le 1$.

Esercizio 1.11. *Calcolare l'integrale* $\iint_Q (\sin x + \cos y)\,dxdy$*, dove* $Q = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.

Esercizio 1.12. *Passando a coordinate polari, calcolare l'integrale* $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$*, dove* D *è il disco:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\} \quad (a > 0).$$

Esercizio 1.13.

1. *Utilizzando un integrale doppio, calcolare l'area del cerchio di raggio* R*, cioè calcolare* $\iint_{x^2+y^2\le R^2} dx\,dy$.
2. *Calcolare l'area della (regione di piano interna all') ellisse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$*, cioè calcolare* $\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \mathrm{dxdy}$.

Esercizio 1.14. *Passando a coordinate polari, calcolare l'integrale* $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$*, dove* D *è il disco:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2\}$$

1.1 Risposte

Esercizio 1.7 *1.* $\frac{16}{3}\pi$. *2.* 0. *3.* 1. *4.* $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$.

5. $$\begin{aligned} \iint_D y\,dxdy &= \int_0^1 (\int_{2x^2}^2 y\,dy)dx \\ &= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{2x^2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (2-2x^4)dx = \tfrac{8}{5} \end{aligned}.$$

Esercizio 1.8 $S = 2$.

Esercizio 1.9 $\iint_T xy\,dxdy = \frac{1}{8}$.

Esercizio 1.10 $\iint_D x\,dxdy = 0$

Esercizio 1.11 $\iint_Q (\sin x + \cos y)\,dxdy = \pi$.

Esercizio 1.12 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{\pi a^4}{2}$.

Esercizio 1.14 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \pi(1-e^{-a^2})$.

2 Integrali doppi generalizzati

Esercizio 2.1. *Passando a coordinate polari, calcolare l'integrale* $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$*, dove* D *è il disco:*

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\} \quad (a > 0)$.

Esercizio 2.2. *Passando a coordinate polari, calcolare l'integrale* $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

Esercizio 2.3. *Verificare che* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

2.1 Risposte

Esercizio 2.1 Si tratta di un integrale doppio generalizzato, perché la funzione integranda non è limitata in un intorno dell'origine. Il significato da dare all'integrale è il seguente. Si calcola l'integrale sulla regione $D \setminus D_\varepsilon$, dove D_ε è un dischetto di raggio ε centrato nel punto singolare (nel nostro caso l'origine), e si calcola il limite dell'integrale per $\varepsilon \to 0$. Se tale limite esiste finito, si dice che l'integrale è convergente in D (e, per definizione, il valore del limite è l'integrale su D). Passando a coordinate polari, l'integrale

$$\iint_{D\setminus D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

è dato da

$$\iint_{D\setminus D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\varepsilon^a \frac{1}{r} r\,dr = 2\pi(a-\varepsilon)$$

il cui limite, per $\varepsilon \to 0$, è $2\pi a$.

Esercizio 2.1

L'integrale va inteso come

$$\lim_{a\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy \tag{2.1}$$

Ricordando l'esercizio 1.14, si ha $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \pi$.

Esercizio 2.3 Occorre scrivere il quadrato dell' integrale come prodotto di due integrali identici rispetto a due diverse variabili d'integrazione e poi passare in coordinate polari.

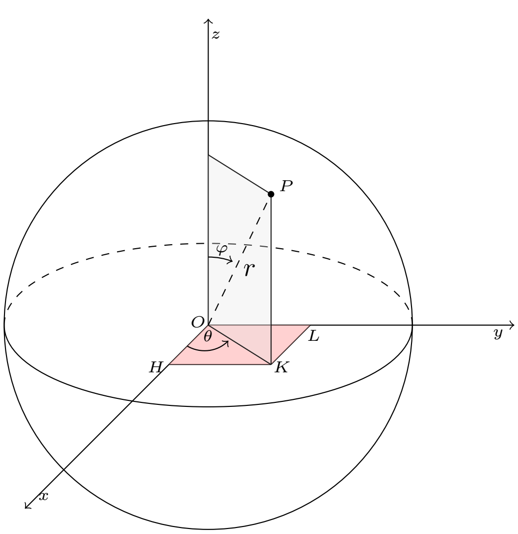
$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr\\
&= 2\pi \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^k = \pi
\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

3 Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche del punto P di $\mathbb{R}^3$ sono costituite dalla terna (r, φ, θ) dove $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le \pi$ è la colatitudine e $0 \le \theta \le 2\pi$ è la longitudine (si veda la figura).



Il legame tra coordinate cartesiane (x, y, z) e coordinate sferiche (r, φ, θ) è il seguente:

$$\begin{cases} x = \overline{OK}\cos\theta = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = \overline{OK}\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

4 Integrali tripli

Esercizio 4.1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_Q (xy^2 + z^3)\, dxdydz$, *dove* $Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

Esercizio 4.2. *Scrivere l'elemento di volume in coordinate sferiche* r, φ, ϑ, *dove* $0 < \varphi < \pi$ *è la colatitudine e* $0 < \vartheta < 2\pi$ *la longitudine.*

Esercizio 4.3. *Calcolare l'integrale triplo*

$$\int_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove E *è la regione compresa tra il cilindro* $x^2 + y^2 = 16$ *e i piani* $z = -5$ *e* $z = 4$.

Esercizio 4.4. *Calcolare l'integrale triplo*

$$\int_E z\, dx\, dy\, dz$$

dove E *è il solido delimitato dal paraboloide* $z = 4x^2 + 4y^2$ *e dal piano* $z = 4$.

Esercizio 4.5 (Volume della sfera)**.** *Utilizzando un'integrazione multipla trovare il volume della sfera di raggio* R.

Esercizio 4.6. *Utilizzando un'integrazione multipla trovare il volume dell'ellissoide di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esercizio 4.7. *Trovare il centroide (baricentro nel caso di densità costante) del tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano di equazione*

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

Esercizio 4.8. *La sfera* S *di raggio* R *e centro* $O(0,0,0)$ *ha densità* $f(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + b$. *Calcolare la massa ed individuare il centro di massa della sfera* S.

Esercizio 4.9. *La semisfera (superiore)* N *di raggio* R *e centro* $O(0,0,0)$ *ha densità* $f(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + b$. *Calcolare la massa ed individuare il centro di massa della sfera* S.

Esercizio 4.10. *Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea di raggio* R *e massa* m, *rispetto ad un asse per il centro.*

Esercizio 4.11. *Calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo di raggio* R, *altezza* h *e massa* m, *rispetto al suo asse.*

4.1 Risposte

Esercizio 4.1 $\iiint_Q xy^2 + z^3 \, dxdydz = \dfrac{89}{2}$

Esercizio 4.2 L'elemento di volume è $dV = r^2(\sin\phi) dr d\phi d\vartheta$.

Esercizio 4.3 In coordinate cilindriche $x = r\cos\vartheta, y = r\sin\vartheta, z = z,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le r \le 4,\ -5 \le z \le 4$, si ha:

$$\int_E \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-5}^4 dz \int_0^4 r^2 dr = 2\pi\, 9\, \frac{4^3}{3} = 384\pi$$

Esercizio 4.4 Per descrivere il solido E in coordinate cilindriche ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$) si osservi che, in corrispondenza del piano $z = 0$ il raggio r vale zero mentre in corrispondenza del piano $z = 4$, r vale uno. Inoltre, fissato r e θ, z varia dal *paraboloide* che ha equazione $z = 4r^2$ al *piano* di equazione $z = 4$. Pertanto le coordinate cilindriche r, θ, z sono soggette alle seguenti limitazioni: $0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 4r^2 \le z \le 4$.

$$\int_E z dx\,dy\,dz = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{4r^2}^4 z dz = 2\pi \int_0^1 8(r - r^5) dr = \frac{16}{3}\pi$$

Si noti che è possibile calcolare lo stesso integrale modificando l'ordine di integrazione delle variabili. In tal caso però bisogna modificare in modo opportuno gli estremi di integrazione. Ad esempio

$$\int_E z dx\,dy\,dz = \int_0^4 z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{z}}{2}} r dr = \int_0^4 z dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{z}}{2}} = \frac{\pi}{4}\int_0^4 z^2 dz = \frac{16}{3}\pi$$

Esercizio 4.5

Primo modo (con un integrale triplo).

Se S indica la regione di spazio occupata dalla sfera di centro l'origine e raggio R, cioè

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$

allora il volume V della sfera è dato da

$$V = \iiint_S dxdydz$$

Passando in coordinate sferiche si ottiene $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi} d\phi \int_0^R r^2 sin\phi\, dr$; con pochi calcoli si ottiene $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Secondo modo (con un integrale doppio). Sia D il disco di centro l'origine e raggio R

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Il volume V della sfera è espresso dal seguente integrale doppio

$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}dr = \int_0^{2\pi} d\theta - \tfrac{2}{3}\left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3}R^3 d\theta = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

Esercizio 4.6 Se si effettua il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = aX \\ y = bY \\ z = cZ \end{cases}$$

il volume V dell'ellissoide è dato dal seguente integrale

$$V = \iiint_S dV$$

dove $S = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1\}$ e $dV = abc\,dX\,dY\,dZ$ (dV è l'elemento infinitesimo di volume nelle coordinate X, Y, Z). Pertanto il volume dell'ellissoide è

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

Esercizio 4.7 Se T è la regione di spazio delimitata dal tetraedro allora il suo centroide $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ è dato da

$$\overline{x} = \frac{\iiint_T x\delta dV}{\iiint_T \delta dV} \qquad \overline{y} = \frac{\iiint_T y\delta dV}{\iiint_T \delta dV} \qquad \overline{z} = \frac{\iiint_T z\delta dV}{\iiint_T \delta dV}$$

Posto $\delta(x, y, z) = 1$ per ogni $(x, y, z) \in T$ (il tetraedro ha densità costante) si ha $\iiint_T \delta dV = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{6} = 4$. Quindi (fare una figura)

$$\overline{x} = \frac{1}{4}\int_0^2 dx \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} dy \int_0^{4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})} x\,dz = \frac{1}{2}$$

In modo analogo si trova $\overline{y} = \frac{3}{4}$, $\overline{z} = 1$.